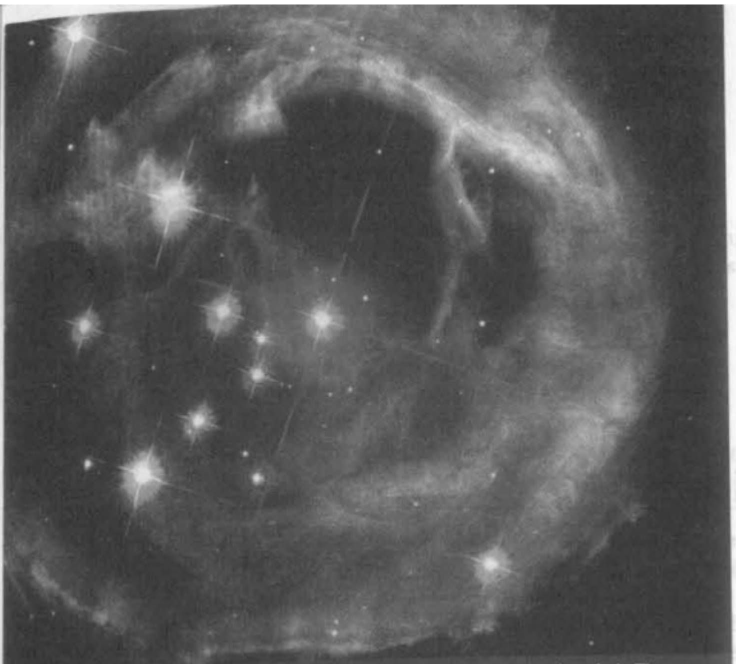

La supergigante roja V838 Monocerotis está a 20 000 años luz de la Tierra. En 2002 la estrella mostró una gran explosión de energía representativa de un evento nova. Sin embargo, después de la explosión, el comportamiento variable de radiación infrarroja de la estrella no siguió el patrón nova característico. Se han propuesto los modelos de interacción gravitacional que sugieren la combinación de la estrella con una compañera binaria o sus propios planetas para explicar el comportamiento extraordinario. (© STScI/NASA/Corbis)

13 Gravitación universal

Antes de 1687 se había acumulado una gran cantidad de información acerca de los movi-mientos de la Luna y los planetas, pero no se había logrado una comprensión clara de las fuerzas relacionadas con estos movimientos. En dicho año, Isaac Newton proporcionó la clave que abrió los secretos de los cielos. Él sabía, a partir de su primera ley, que una fuerza neta tenía que actuar sobre la Luna, porque sin tal fuerza la Luna se movería en una trayectoria en línea recta en lugar de su órbita casi circular. Newton explicó que esta fuerza era la atracción gravitacional que ejercía la Tierra sobre la Luna. Se dio cuenta de que las fuerzas participantes en la atracción Tierra–Luna y en la atracción Sol–planeta no eran algo especial de dichos sistemas, sino casos particulares de la atracción general y universal entre los objetos. En otras palabras, Newton entendió que la misma fuerza de atracción que hace a la Luna seguir su trayectoria alrededor de la Tierra también hace que una manzana caiga de un árbol. Fue la primera ocasión en que se unificaron los movimientos "terrenal" y "celestial".

En este capítulo se estudia la ley de gravitación universal. Se enfatiza una descripción del movimiento planetario porque la información astronómica proporcionan una importante prueba de la validez de esta ley. Luego se muestra que las leyes del movimiento planetario elaboradas por Johannes Kepler se siguen de la ley de gravitación universal y del principio de conservación de la cantidad de movimiento angular. Se concluye con la deducción de una expresión general para la energía potencial gravitacional y el examen de la energía del movimiento planetario y de satélites.

13.1 Ley de Newton de gravitación universal

Quizá ha escuchado la leyenda de que, mientras dormitaba bajo un árbol, Newton fue golpeado en la cabeza por una manzana que caía. Este supuesto accidente hizo que él imaginara que tal vez todos los objetos en el Universo eran atraídos unos hacia otros en la misma forma que la manzana era atraída hacia la Tierra. Newton analizó información astronómica acerca del movimiento de la Luna alrededor de la Tierra. A partir de dicho análisis, hizo la osada afirmación de que la ley de fuerza que gobierna el movimiento de los planetas era la *misma* ley de fuerza que atraía una manzana en caída libre hacia la Tierra.

En 1687 Newton publicó su obra acerca de la ley de gravedad en su tratado *Principios matemáticos de filosofía natural.* **La ley de Newton de la gravitación universal** afirma que

> toda partícula en el Universo atrae a cualquier otra partícula con una fuerza que es directamente proporcional al producto de sus masas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia entre ellas.

◀ La ley de gravitación universal

Si las partículas tienen masa m_1 y m_2 y están separadas una distancia r, la magnitud de esta fuerza gravitacional es

$$F_g = G\frac{m_1 m_2}{r^2} \tag{13.1}$$

donde G es una constante llamada *constante gravitacional universal.* Su valor en unidades del SI es

$$G = 6.673 \times 10^{-11}\ \mathrm{N\cdot m^2/kg^2} \tag{13.2}$$

Henry Cavendish (1731–1810) midió la constante gravitacional universal en un importante experimento de 1798. El aparato de Cavendish consiste en dos pequeñas esferas, cada una de masa m, fijas en los extremos de una barra horizontal ligera suspendida de una fibra fina o alambre metálico delgado, como se ilustra en la figura 13.1. Cuando dos esferas grandes, cada una de masa M, se colocan cerca de las más pequeñas, la fuerza de atracción entre las esferas pequeñas y grandes hace que la barra gire y contorsiona el alambre de suspensión a una nueva orientación de equilibrio. El ángulo de rotación se mide por la desviación de un haz de luz reflejado desde un espejo unido a la suspensión vertical.

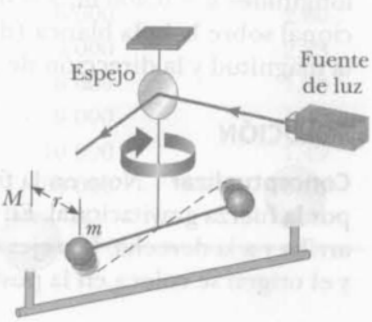

Figura 13.1 Aparato de Cavendish para medir G. La línea discontinua representa la posición original de la barra.

La forma de la ley de fuerza conocida por la ecuación 13.1 con frecuencia se conoce como una **ley de cuadro inverso** porque la magnitud de la fuerza varía con el cuadrado inverso de la separación de las partículas.[1] En capítulos posteriores se verán otros ejemplos de este tipo de ley de fuerza. Esta fuerza se expresa en forma vectorial al definir un vector unitario $\hat{\mathbf{r}}_{12}$ (figura 13.2). Ya que este vector unitario se dirige de la partícula 1 a la partícula 2, la fuerza que ejerce la partícula 1 sobre la partícula 2 es

$$\vec{\mathbf{F}}_{12} = -G\frac{m_1 m_2}{r^2}\,\hat{\mathbf{r}}_{12} \tag{13.3}$$

donde el signo negativo indica que la partícula 2 es atraída hacia la partícula 1; en consecuencia, la fuerza sobre la partícula 2 debe dirigirse hacia la partícula 1. Por la tercera ley de Newton, la fuerza que ejerce la partícula 2 sobre la partícula 1, designada $\vec{\mathbf{F}}_{21}$, es igual en magnitud a $\vec{\mathbf{F}}_{12}$ y en la dirección opuesta. Esto es: dichas fuerzas forman un par acción–reacción, y $\vec{\mathbf{F}}_{21} = -\vec{\mathbf{F}}_{12}$.

Dos características de la ecuación 13.3 merecen mención. Primero, la fuerza gravitacional es una fuerza de campo que siempre existe entre dos partículas, sin importar el medio que las separe. Ya que la fuerza varía según el cuadrado inverso de la distancia entre las partículas, disminuye rápidamente con separación creciente.

La ecuación 13.3 también se usa para mostrar que **la fuerza gravitacional que ejerce una distribución de masa esféricamente simétrica y de tamaño finito sobre una partícula**

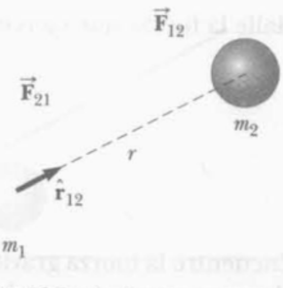

Figura 13.2 La fuerza gravitacional entre dos partículas es de atracción. El vector unitario $\hat{\mathbf{r}}_{12}$ se dirige de la partícula 1 a la partícula 2. Note que $\vec{\mathbf{F}}_{21} = -\vec{\mathbf{F}}_{12}$.

[1] Una proporcionalidad *inversa* entre dos cantidades x y y es aquella en la que $y = k/x$, donde k es una constante. Una proporción *directa* entre x y y existe cuando $y = kx$.

PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 13.1
Esté convencido acerca de *g* y *G*

El símbolo g representa la magnitud de la aceleración en caída libre cerca de un planeta. En la superficie de la Tierra, g tiene un valor promedio de 9.80 m/s². Por otra parte, G es una constante universal que tiene el mismo valor en cualquier parte del Universo.

afuera de la distribución es la misma como si toda la masa de la distribución se concentrara en el centro. Por ejemplo, la magnitud de la fuerza que ejerce la Tierra en una partícula de masa m cerca de la superficie de la Tierra es

$$F_g = G\frac{M_T m}{R_T^2} \tag{13.4}$$

donde M_T es la masa de la Tierra y R_T es su radio. Esta fuerza se dirige hacia el centro de la Tierra.

Pregunta rápida 13.1 Un planeta tiene dos lunas de igual masa. La luna 1 está en órbita circular de radio r. La luna 2 está en órbita circular de radio $2r$. ¿Cuál es la magnitud de la fuerza gravitacional que ejerce el planeta sobre la luna 2? a) cuatro veces mayor que sobre la luna 1, b) dos veces mayor que sobre la luna 1, c) igual que sobre la luna 1, d) la mitad de la ejercida sobre la luna 1, e) un cuarto de la ejercida sobre la luna 1.

EJEMPLO 13.1 ¿Alguien juega billar?

Tres bolas de billar de 0.300 kg se colocan sobre una mesa en las esquinas de un triángulo rectángulo, como se muestra en la figura 13.3. Los lados del triángulo tienen longitudes $a = 0.400$ m, $b = 0.300$ m y $c = 0.500$ m. Calcule el vector de fuerza gravitacional sobre la bola blanca (designada m_1) que resulta de las otras dos bolas, así como la magnitud y la dirección de esta fuerza.

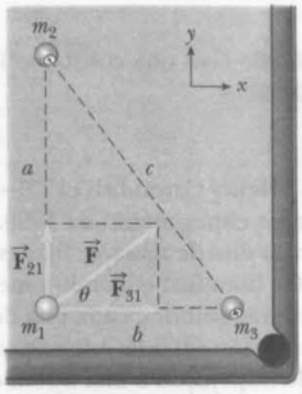

Figura 13.3 (Ejemplo 13.1) La fuerza gravitacional resultante que actúa sobre la bola blanca es la suma vectorial $\vec{F}_{21} + \vec{F}_{31}$.

SOLUCIÓN

Conceptualizar Note en la figura 13.3 que la bola blanca es atraída hacia ambas bolas por la fuerza gravitacional. En la gráfica se aprecia que la fuerza neta debe apuntar hacia arriba y a la derecha. Los ejes coordenados se ubican como se muestra en la figura 13.3, y el origen se coloca en la posición de la bola blanca.

Categorizar Este problema involucra evaluar las fuerzas gravitacionales sobre la bola blanca con el uso de la ecuación 13.1. Una vez evaluadas dichas fuerzas, se convierte en un problema de suma vectorial para encontrar la fuerza neta.

Analizar Encuentre la fuerza que ejerce m_2 sobre la bola blanca:

$$\vec{F}_{21} = G\frac{m_2 m_1}{r_{21}^2}\hat{j}$$

$$= (6.67 \times 10^{-11}\ \text{N}\cdot\text{m}^2/\text{kg}^2)\frac{(0.300\ \text{kg})(0.300\ \text{kg})}{(0.400\ \text{m})^2}\hat{j}$$

$$= 3.75 \times 10^{-11}\hat{j}\ \text{N}$$

Halle la fuerza que ejerce m_3 sobre la bola blanca:

$$\vec{F}_{31} = G\frac{m_3 m_1}{r_{31}^2}\hat{i}$$

$$= (6.67 \times 10^{-11}\ \text{N}\cdot\text{m}^2/\text{kg}^2)\frac{(0.300\ \text{kg})(0.300\ \text{kg})}{(0.300\ \text{m})^2}\hat{i}$$

$$= 6.67 \times 10^{-11}\hat{i}\ \text{N}$$

Encuentre la fuerza gravitacional neta sobre la bola blanca al sumar estos vectores de fuerza:

$$\vec{F} = \vec{F}_{31} + \vec{F}_{21} = (6.67\hat{i} + 3.75\hat{j}) \times 10^{-11}\ \text{N}$$

Halle la magnitud de esta fuerza:

$$F = \sqrt{F_{31}^2 + F_{21}^2} = \sqrt{(6.67)^2 + (3.75)^2} \times 10^{-11}\ \text{N}$$

$$= 7.65 \times 10^{-11}\ \text{N}$$

Encuentre la tangente del ángulo θ para el vector de fuerza neta: $\tan\theta = \dfrac{F_y}{F_x} = \dfrac{F_{21}}{F_{31}} = \dfrac{3.75 \times 10^{-11}\ \text{N}}{6.67 \times 10^{-11}\ \text{N}} = 0.562$

Evalúe el ángulo θ: $\theta = \tan^{-1}(0.562) = \boxed{29.3°}$

Finalizar El resultado para F muestra que las fuerzas gravitacionales entre los objetos cotidianos tienen magnitudes extremadamente pequeñas.

13.2 Aceleración en caída libre y fuerza gravitacional

Ya que la magnitud de la fuerza que actúa sobre un objeto de masa m en caída libre cerca de la superficie de la Tierra se conoce por la ecuación 13.4, se puede igualar esta fuerza con la que se proporciona por la ecuación 5.6, $F_g = mg$, para obtener

$$mg = G\frac{M_T m}{R_T^2}$$

$$g = G\frac{M_T}{R_T^2} \qquad (13.5)$$

Considere ahora un objeto de masa m ubicado a una distancia h sobre la superficie de la Tierra o a una distancia r del centro de la Tierra, donde $r = R_T + h$. La magnitud de la fuerza gravitacional que actúa sobre este objeto es

$$F_g = G\frac{M_T m}{r^2} = G\frac{M_T m}{(R_T + h)^2}$$

La magnitud de la fuerza gravitacional que actúa sobre el objeto en esta posición también es $F_g = mg$, donde g es el valor de la aceleración en caída libre a la altura h. Al sustituir esta expresión para F_g en la última ecuación, muestra que g se conoce por

$$g = \frac{GM_T}{r^2} = \frac{GM_T}{(R_T + h)^2} \qquad (13.6)$$

◄ Variación de g con la altura

Por lo tanto, se sigue que g *disminuye* con *altura creciente*. En la tabla 13.1 se proporcionan los valores de g para diferentes alturas. Ya que el peso de un objeto es mg, se ve que conforme $r \to \infty$, el peso tiende a cero.

TABLA 13.1

Aceleración en caída libre g a diferentes alturas sobre la superficie de la Tierra

Altura h (km)	g (m/s²)
1 000	7.33
2 000	5.68
3 000	4.53
4 000	3.70
5 000	3.08
6 000	2.60
7 000	2.23
8 000	1.93
9 000	1.69
10 000	1.49
50 000	0.13
∞	0

Pregunta rápida 13.2 Superman está de pie en lo alto de una montaña muy alta y lanza una pelota de beisbol horizontalmente con una rapidez tal que la pelota entra en una órbita circular alrededor de la Tierra. Mientras la pelota está en órbita, ¿cuál es la magnitud de la aceleración de la pelota? a) Depende de qué tan rápido se lance la pelota. b) Es cero porque la pelota no cae al suelo. c) Es ligeramente menor que 9.80 m/s². d) Es igual a 9.80 m/s².

EJEMPLO 13.2 Variación de g con la altura h

La Estación Espacial Internacional opera a una altura de 350 km. Los planes para la construcción final muestran que 4.22×10^6 N de material, pesado en la superficie de la Tierra, fue transportado por diferentes naves espaciales. ¿Cuál es el peso de la estación espacial cuando está en órbita?

SOLUCIÓN

Conceptualizar La masa de la estación espacial es fija; independiente de su ubicación. En términos de la explicación de esta sección, se advierte de que el valor de g se reducirá en la altura de la órbita de la estación espacial. Por lo tanto, su peso será más pequeño que en la superficie de la Tierra.

Categorizar Este ejemplo es un problema de sustitución relativamente simple.

Hallar la masa de la estación espacial a partir de su peso en la superficie de la Tierra:

$$m = \frac{F_g}{g} = \frac{4.22 \times 10^6 \text{ N}}{9.80 \text{ m/s}^2} = 4.31 \times 10^5 \text{ kg}$$

Aplique la ecuación 13.6 con $h = 350$ km para encontrar g en la posición orbital:

$$g = \frac{GM_T}{(R_T + h)^2}$$

$$= \frac{(6.67 \times 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2)(5.98 \times 10^{24} \text{ kg})}{(6.37 \times 10^6 \text{ m} + 0.350 \times 10^6 \text{ m})^2} = 8.83 \text{ m/s}^2$$

Use este valor de g para encontrar el peso de la estación espacial en órbita:

$$mg = (4.31 \times 10^5 \text{ kg})(8.83 \text{ m/s}^2) = \boxed{3.80 \times 10^6 \text{ N}}$$

EJEMPLO 13.3 La densidad de la Tierra

Con el radio conocido de la Tierra y $g = 9.80$ m/s^2 en la superficie de la Tierra, encuentre la densidad promedio de la Tierra.

SOLUCIÓN

Conceptualizar Suponga que la Tierra es una esfera perfecta. La densidad de material en la Tierra varía, pero adopte un modelo simplificado en el que considere que la densidad es uniforme en todas las partes de la Tierra. La densidad resultante es la densidad promedio de la Tierra.

Categorizar Este ejemplo es un problema de sustitución relativamente simple.

Resuelva la ecuación 13.5 para la masa de la Tierra:

$$M_T = \frac{gR_T^2}{G}$$

Sustituya esta masa en la definición de la densidad (ecuación 1.1):

$$\rho_T = \frac{M_T}{V_T} = \frac{(gR_T^2/G)}{\frac{4}{3}\pi R_T^3} = \frac{3}{4}\frac{g}{\pi G R_T}$$

$$= \frac{3}{4}\frac{9.80 \text{ m/s}^2}{\pi(6.67 \times 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2)(6.37 \times 10^6 \text{ m})} = \boxed{5.51 \times 10^3 \text{ kg/m}^3}$$

¿Qué pasaría si? ¿Y si se le dice que una densidad características del granito en la superficie de la Tierra es de 2.75×10^3 kg/m^3? ¿Qué concluiría acerca de la densidad del material en el interior de la Tierra?

Respuesta Ya que este valor es casi la mitad de la densidad calculada como promedio para toda la Tierra, se concluiría que el núcleo de la Tierra tiene una densidad mucho mayor que el valor promedio. Es más sorprendente que el experimento de Cavendish, que determina G y se puede realizar sobre una mesa, combinado con simples mediciones de g en caída libre, ¡proporciona información acerca del núcleo de la Tierra!

13.3 Las leyes de Kepler y el movimiento de los planetas

Los humanos han observado los movimientos de los planetas, estrellas y otros objetos en el espacio durante miles de años. En la historia temprana, dichas observaciones condujeron a los científicos a considerar a la Tierra como el centro del Universo. Este *modelo geocéntrico* fue elaborado y formalizado por el astrónomo griego Claudius Ptolomeo (c. 100–c. 170) en el siglo II y fue aceptado durante los siguientes 1 400 años. En 1543 el astrónomo polaco Nicolás Copérnico (1473–1543) sugirió que la Tierra y los otros planetas daban vueltas en órbitas circulares alrededor del Sol (el *modelo heliocéntrico*).

El astrónomo danés Tycho Brahe (1546–1601) quería determinar cómo estaban construidos los cielos y siguió un proyecto para determinar las posiciones de las estrellas y los planetas. Dichas observaciones de los planetas y de 777 estrellas visibles a simple vista se realizaron sólo con un gran sextante y una brújula. (Todavía no se inventaba el telescopio.)

El astrónomo alemán Johannes Kepler fue auxiliar de Brahe durante una época breve antes de la muerte de éste, después de lo cual adquirió los datos astronómicos de su mentor y pasó 16 años intentando deducir un modelo matemático para el movimiento de los planetas. Tal información es difícil de ordenar porque los planetas en movimiento se observan desde una Tierra en movimiento. Después de muchos cálculos laboriosos, Kepler encontró que los datos de Brahe acerca de la revolución de Marte alrededor del Sol conducían a un modelo exitoso.

JOHANNES KEPLER
Astrónomo alemán (1571–1630)
Kepler es mejor conocido por desarrollar las leyes de movimiento planetario en función de las observaciones cuidadosas de Tycho Brahe.

El análisis completo de Kepler del movimiento planetario se resume en tres enunciados que se conocen como **leyes de Kepler:**

◄ Leyes de Kepler

1. Todos los planetas se mueven en órbitas elípticas con el Sol en un foco.
2. El radio vector dibujado desde el Sol a un planeta barre áreas iguales en intervalos de tiempo iguales.
3. El cuadrado del periodo orbital de cualquier planeta es proporcional al cubo del semieje mayor de la órbita elíptica.

Primera ley de Kepler

A partir de lo visto hasta ahora en este capítulo, resultan familiares las órbitas circulares de los objetos alrededor de centros de fuerza gravitacional. La primera ley de Kepler indica que la órbita circular es un caso muy especial y que las órbitas elípticas son la situación general. Esta noción fue difícil de aceptar para los científicos de la época, porque creían que las órbitas circulares perfectas de los planetas reflejaban la perfección del cielo.

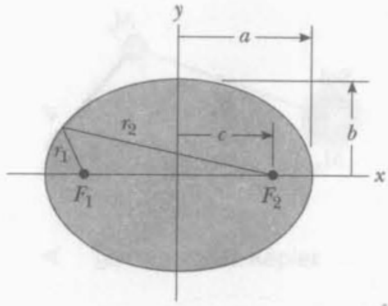

Figura 13.4 Gráfica de una elipse. El semieje mayor tiene longitud a, y el semieje menor tiene longitud b. Cada foco se ubica a una distancia c del centro a cada lado de éste.

La figura 13.4 muestra la geometría de una elipse, que sirve como modelo para la órbita elíptica de un planeta. Una elipse se define matemáticamente al elegir dos puntos F_1 y F_2, cada uno llamado **foco**, y luego dibujar una curva a través de los puntos para los que la suma de las distancias r_1 y r_2 desde F_1 y F_2, respectivamente, es una constante. La mayor distancia a través del centro entre los puntos en la elipse (y que pasa a través de cada foco) se llama **eje mayor,** y esta distancia es $2a$. En la figura 13.4, el eje mayor se dibuja a lo largo de la dirección x. La distancia a se llama **semieje mayor**. De igual modo, la distancia más corta a través del centro entre los puntos en la elipse se llama **eje menor** de longitud $2b$, donde la distancia b es el **semieje menor**. Cualquier foco de la elipse se ubica a una distancia c desde el centro de la elipse, donde $a^2 = b^2 + c^2$. En la órbita elíptica de un planeta alrededor del Sol, el Sol está en un foco de la elipse. No hay nada en el otro foco.

La **excentricidad** de una elipse se define como $e = c/a$ y describe la forma general de la elipse. Para un círculo, $c = 0$, y por tanto la excentricidad es cero. Mientras más pequeña sea b en comparación con a, más corta es la elipse a lo largo de la dirección y en comparación con su medida en la dirección x en la figura 13.4. A medida que b disminuye, c aumenta y la excentricidad e aumenta. Por lo tanto, mayores valores de excentricidad corresponden a elipses más grandes y delgadas. El intervalo de valores de la excentricidad para una elipse es $0 < e < 1$.

PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 13.2
¿Dónde está el Sol?
El Sol se ubica en un foco de la órbita elíptica de un planeta. *No* se ubica en el centro de la elipse.

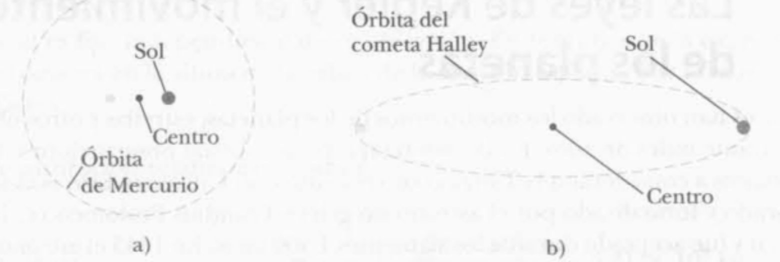

Figura 13.5 a) La forma de la órbita de Mercurio, que tiene la mayor excentricidad ($e = 0.21$) entre los ocho planetas del sistema solar. El Sol se ubica en el punto amarillo, que es un foco de la elipse. No hay nada físico ubicado en el centro (el punto pequeño) o el otro foco (el punto azul). b) La forma de la órbita del cometa Halley.

Las excentricidades para órbitas planetarias varían enormemente en el sistema solar. La excentricidad de la órbita de la Tierra es 0.017, lo que la hace casi circular. Por otra parte, la excentricidad de la órbita de Mercurio es 0.21, la mayor de los ocho planetas. La figura 13.5a muestra una elipse con una excentricidad igual a la de la órbita de Mercurio. Note que incluso esta órbita de gran excentricidad es difícil de distinguir a partir de un círculo, lo que es una explicación para que la primera ley de Kepler sea un logro admirable. La excentricidad de la órbita del cometa Halley es 0.97, lo que describe una órbita cuyo eje mayor es mucho más largo que su eje menor, como se muestra en la figura 13.5b. Como resultado, el cometa Halley pasa gran parte de su periodo de 76 años lejos del Sol e invisible a la Tierra. Sólo es visible a simple vista durante una pequeña parte de su órbita, cuando está cerca del Sol.

Ahora imagine un planeta en una órbita elíptica tal como se muestra en la figura 13.4, con el Sol en el foco F_2. Cuando el planeta está en el extremo izquierdo del diagrama, la distancia entre el planeta y el Sol es $a + c$. En este punto, llamado *afelio*, el planeta está a su máxima distancia del Sol. (Para un objeto en órbita alrededor de la Tierra, este punto se llama *apogeo*.) Por lo contrario, cuando el planeta está en el extremo derecho de la elipse, la distancia entre el planeta y el Sol es $a - c$. En este punto, llamado *perihelio* (para una órbita terrestre, el *perigeo*), el planeta está a su distancia mínima desde el Sol.

La primera ley de Kepler es un resultado directo de la naturaleza de cuadrado inverso de la fuerza gravitacional. Ya se explicaron las órbitas circular y elíptica, formas permitidas de las órbitas para objetos que están *ligados* al centro de fuerza gravitacional. Estos objetos incluyen planetas, asteroides y cometas que se mueven repetidamente alrededor del Sol, así como lunas que orbitan un planeta. También hay objetos *no ligados*, tales como un meteoroide, provenientes desde el espacio profundo, que pueden pasar por el Sol una vez y luego nunca regresar. La fuerza gravitacional entre el Sol y dichos objetos también varía con el cuadrado inverso de la distancia de separación, y las rutas permitidas para tales objetos incluyen parábolas ($e = 1$) e hipérbolas ($e > 1$).

Segunda ley de Kepler

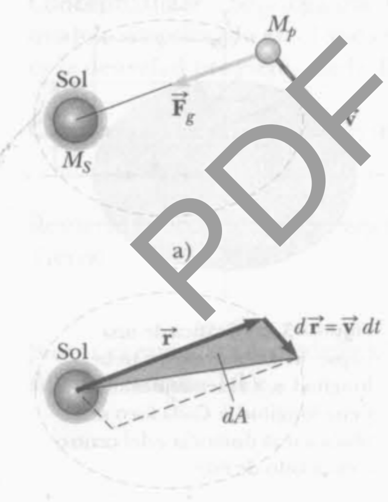

Figura 13.6 a) La fuerza gravitacional que actúa sobre un planeta se dirige hacia el Sol. b) Conforme un planeta orbita el Sol, el área que barre el radio vector en un intervalo de tiempo dt es igual a la mitad del área del paralelogramo formado por los vectores $\vec{r}$ y $d\vec{r} = \vec{v}\,dt$.

Se puede demostrar que la segunda ley de Kepler es una consecuencia de la conservación de la cantidad de movimiento angular. Considere un planeta de masa M_p que se mueve en torno al Sol en una órbita elíptica (figura 13.6a). Considere al planeta como un sistema. El Sol se modela como mucho más pesado que el planeta, de tal modo que el Sol no se mueve. La fuerza gravitacional que ejerce el Sol sobre el planeta es una fuerza central, siempre a lo largo del radio vector, dirigido hacia el Sol (figura 13.6a). El momento de torsión sobre el planeta debido a esta fuerza central claramente es cero porque $\vec{F}_g$ es paralela a $\vec{r}$.

Recuerde que el momento de torsión externo neto sobre un sistema es igual a la relación de cambio en el tiempo de la cantidad de movimiento angular del sistema; esto es, $\sum \vec{\tau} = d\vec{L}/dt$ (ecuación 11.13). Por lo tanto, ya que el momento de torsión externo sobre el planeta es cero, se modela como un sistema aislado para cantidad de movimiento angular y la **cantidad de movimiento angular $\vec{L}$ del planeta es una constante del movimiento:**

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = M_p \vec{r} \times \vec{v} = \text{constante}$$

Este resultado se puede relacionar con la siguiente consideración geométrica. En un intervalo de tiempo dt, el radio vector $\vec{\mathbf{r}}$ en la figura 13.6b barre el área dA, que es igual a la mitad del área $|\vec{\mathbf{r}} \times d\vec{\mathbf{r}}|$ del paralelogramo formado por los vectores $\vec{\mathbf{r}}$ y $d\vec{\mathbf{r}}$. Ya que el desplazamiento del planeta en el intervalo de tiempo dt se conoce por $d\vec{\mathbf{r}} = \vec{\mathbf{v}}dt$,

$$dA = \tfrac{1}{2}|\vec{\mathbf{r}} \times d\vec{\mathbf{r}}| = \tfrac{1}{2}|\vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{v}}\,dt| = \frac{L}{2M_p}\,dt$$

$$\frac{dA}{dt} = \frac{L}{2M_p} \tag{13.7}$$

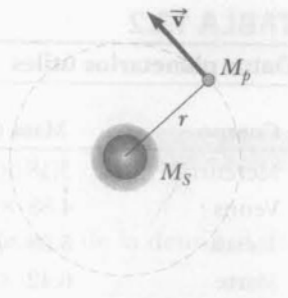

Figura 13.7 Un planeta de masa M_p que se mueve en una órbita circular alrededor del Sol. Las órbitas de todos los planetas, excepto Mercurio, son casi circulares.

donde L y M_p son constantes. Este resultado muestra que **el radio vector desde el Sol a cualquier planeta barre áreas iguales en tiempos iguales.**

Esta conclusión es un resultado de la fuerza gravitacional que es una fuerza central, lo que a su vez implica que la cantidad de movimiento angular del planeta es constante. Por lo tanto, la ley aplica a *cualquier* situación que involucra una fuerza central, ya sea o no de cuadrado inverso.

Tercera ley de Kepler

La tercera ley de Kepler se puede predecir a partir de la ley de cuadrado inverso para órbitas circulares. Considere un planeta de masa M_p que se supone en movimiento alrededor del Sol (masa M_S) en una órbita circular, como en la figura 13.7. Ya que la fuerza gravitacional proporciona la aceleración centrípeta del planeta conforme se mueve en un círculo, se usa la segunda ley de Newton para una partícula en movimiento circular uniforme,

$$F_g = \frac{GM_SM_p}{r^2} = M_pa = \frac{M_pv^2}{r}$$

La rapidez orbital del planeta es $2\pi r/T$, donde T es el periodo; en consecuencia, la expresión precedente se convierte en

$$\frac{GM_S}{r^2} = \frac{(2\pi r/T)^2}{r}$$

$$T^2 = \left(\frac{4\pi^2}{GM_S}\right)r^3 = K_Sr^3$$

donde K_S es una constante conocida por

$$K_S = \frac{4\pi^2}{GM_S} = 2.97 \times 10^{-19}\ \mathrm{s^2/m^3}$$

Esta ecuación también es válida para órbitas elípticas si se sustituye r con la longitud a del semieje mayor (figura 13.4):

$$T^2 = \left(\frac{4\pi^2}{GM_S}\right)a^3 = K_Sa^3 \tag{13.8}$$

◄ Tercera ley de Kepler

La ecuación 13.8 es la tercera ley de Kepler. Como el semieje mayor de una órbita circular es su radio, esta ecuación es válida tanto para órbitas circulares como para elípticas. Note que la constante de proporcionalidad K_S es independiente de la masa del planeta. Por lo tanto, la ecuación 13.8 es válida para *cualquier* planeta.[2] Si tuviera que considerar la órbita de un satélite como la Luna en torno a la Tierra, la constante tendría un valor diferente, con la masa del Sol sustituida por la masa de la Tierra, esto es, $K_T = 4\pi^2/GM_T$.

La tabla 13.2 es un conjunto de datos útiles para planetas y otros objetos en el sistema solar. La columna de la extrema derecha verifica que la relación T^2/r^3 es constante para todos los objetos que orbitan el Sol. Las variaciones pequeñas en los valores de esta columna son resultado de incertidumbres en los datos observados para los periodos y semiejes mayores de los objetos.

Trabajos astronómicos recientes revelaron la existencia de un gran número de objetos del sistema solar más allá de la órbita de Neptuno. En general, dichos objetos se encuen-

[2] La ecuación 13.8 de hecho es una proporción porque la relación de las dos cantidades T^2 y a^3 es una constante. En una proporción, no se requiere que las variables estén limitadas sólo a la primera potencia.

TABLA 13.2

Datos planetarios útiles

Cuerpo	Masa (kg)	Radio medio (m)	Periodo de revolución (s)	Distancia media desde el Sol (m)	$\frac{T^2}{r^3}$ (s^2/m^3)
Mercurio	3.18×10^{23}	2.43×10^6	7.60×10^6	5.79×10^{10}	2.97×10^{-19}
Venus	4.88×10^{24}	6.06×10^6	1.94×10^7	1.08×10^{11}	2.99×10^{-19}
Tierra	5.98×10^{24}	6.37×10^6	3.156×10^7	1.496×10^{11}	2.97×10^{-19}
Marte	6.42×10^{23}	3.37×10^6	5.94×10^7	2.28×10^{11}	2.98×10^{-19}
Júpiter	1.90×10^{27}	6.99×10^7	3.74×10^8	7.78×10^{11}	2.97×10^{-19}
Saturno	5.68×10^{26}	5.85×10^7	9.35×10^8	1.43×10^{12}	2.99×10^{-19}
Urano	8.68×10^{25}	2.33×10^7	2.64×10^9	2.87×10^{12}	2.95×10^{-19}
Neptuno	1.03×10^{26}	2.21×10^7	5.22×10^9	4.50×10^{12}	2.99×10^{-19}
Plutón[a]	$\approx 1.4 \times 10^{22}$	$\approx 1.5 \times 10^6$	7.82×10^9	5.91×10^{12}	2.96×10^{-19}
Luna	7.36×10^{22}	1.74×10^6	—	—	—
Sol	1.991×10^{30}	6.96×10^8	—	—	—

[a] En agosto de 2006, la Unión Astronómica Internacional adoptó una definición de planeta que separa a Plutón de los otros ocho planetas. Ahora Plutón se define como un "planeta enano", como el asteroide Ceres.

tran en el *cinturón Kuiper*, una región que se extiende desde casi 30 UA (el radio orbital de Neptuno) hasta 50 UA. (Una UA es una *unidad astronómica*, igual al radio de la órbita de la Tierra.) Estimaciones actuales identifican, en esta región, al menos 70 000 objetos con diámetros mayores a 100 km. El primer objeto del cinturón Kuiper (KBO) es Plutón, descubierto en 1930, y anteriormente clasificado como planeta. A partir de 1992, se han detectado muchos más, como Varuna (diámetro aproximado 900–1 000 km, descubierto en 2000), Ixion (diámetro aproximado 900–1 000 km, descubierto en 2001) y Quaoar (diámetro aproximado 800 km, descubierto en 2002). Otros todavía no tienen nombre, pero actualmente se indican mediante su fecha de descubrimiento, como 2003 EL61, 2004 DW y 2005 FY9. Un KBO, 2003 UP313, se cree que es más grande que Plutón.

Un subconjunto de aproximadamente 1 400 KBO se llama "Plutinos" porque, como Plutón, muestran un fenómeno de resonancia y orbitan el Sol dos veces en el mismo intervalo de tiempo que Neptuno da vuelta tres veces. La aplicación contemporánea de las leyes de Kepler y propuestas tan exóticas como el intercambio de cantidad de movimiento angular planetario y la migración de los planetas[3] sugiere la excitación de esta área activa de la investigación actual.

Pregunta rápida 13.3 Un asteroide está en una órbita elíptica enormemente excéntrica alrededor del Sol. El periodo de la órbita del asteroide es de 90 días. ¿Cuál de los siguientes enunciados es verdadero acerca de la posibilidad de una colisión entre este asteroide y la Tierra? a) No hay posible peligro de colisión. b) Hay posibilidad de una colisión. c) No hay suficiente información para determinar si hay peligro de colisión.

EJEMPLO 13.4 **La masa del Sol**

Calcule la masa del Sol al notar que el periodo de la órbita de la Tierra alrededor del Sol es 3.156×10^7 s y su distancia desde el Sol es 1.496×10^{11} m.

SOLUCIÓN

Conceptualizar Con respecto a la tercera ley de Kepler, se observa que la masa del Sol se relaciona con el tamaño orbital y el periodo de un planeta.

Categorizar Este ejemplo es un problema de sustitución relativamente simple.

[3] R. Malhotra, "Migrating Planets", *Scientific American*, 281(3), pp. 56–63, septiembre de 1999.

Resuelva la ecuación 13.8 para la masa del Sol: $$M_S = \frac{4\pi^2 r^3}{GT^2}$$

Sustituya los valores conocidos: $$M_S = \frac{4\pi^2(1.496 \times 10^{11}\text{ m})^3}{(6.67 \times 10^{-11}\text{ N}\cdot\text{m}^2/\text{kg}^2)(3.156 \times 10^7\text{ s})^2} = \boxed{1.99 \times 10^{30}\text{ kg}}$$

En el ejemplo 13.3, una interpretación de las fuerzas gravitacionales permitió encontrar algo acerca de la densidad del núcleo de la Tierra, ¡y ahora esta interpretación se usó para determinar la masa del Sol!

EJEMPLO 13.5 Un satélite geosíncrono

Considere un satélite de masa m que se mueve en una órbita circular alrededor de la Tierra con una rapidez constante v y a una altura h sobre la superficie de la Tierra, como se muestra en la figura 13.8.

A) Determine la rapidez del satélite en términos de G, h, R_T (el radio de la Tierra) y M_T (la masa de la Tierra).

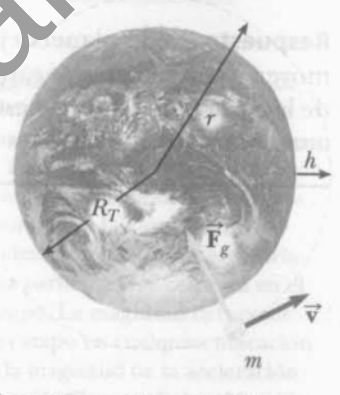

Figura 13.8 (Ejemplo 13.5) Un satélite de masa m se mueve alrededor de la Tierra en una órbita circular de radio r con rapidez constante v. La única fuerza que actúa sobre el satélite es la fuerza gravitacional $\vec{F}_g$. (Dibujo hecho sin escala.)

SOLUCIÓN

Conceptualizar Imagine que el satélite se mueve alrededor de la Tierra en una órbita circular bajo la influencia de la fuerza gravitacional.

Categorizar El satélite debe tener una aceleración centrípeta. Debido a eso, el satélite se clasificó como una partícula bajo una fuerza neta y una partícula en movimiento circular uniforme.

Analizar La única fuerza externa que actúa sobre el satélite es la fuerza gravitacional, que actúa hacia el centro de la Tierra y mantiene al satélite en su órbita circular.

Aplique la segunda ley de Newton al satélite: $$F_g = G\frac{M_T m}{r^2} = ma = m\frac{v^2}{r}$$

Resuelva para v y note que la distancia r desde el centro de la Tierra al satélite es $r = R_T + h$: $$1)\quad v = \sqrt{\frac{GM_T}{r}} = \boxed{\sqrt{\frac{GM_T}{R_T + h}}}$$

B) Si el satélite es *geosíncrono* (es decir, parece permanecer en una posición fija sobre la Tierra), ¿qué tan rápido se mueve a través del espacio?

SOLUCIÓN

Para que parezca mantenerse en una posición fija sobre la Tierra, el periodo del satélite debe ser 24 h = 86 400 s y el satélite debe estar en órbita directamente sobre el ecuador.

Resuelva la tercera ley de Kepler (con $a = r$ y $M_S \to M_T$) para r: $$r = \left(\frac{GM_T T^2}{4\pi^2}\right)^{1/3}$$

Sustituya valores numéricos: $$r = \left[\frac{(6.67 \times 10^{-11}\text{ N}\cdot\text{m}^2/\text{kg}^2)(5.98 \times 10^{24}\text{ kg})(86\,400\text{ s})^2}{4\pi^2}\right]^{1/3}$$
$$= 4.23 \times 10^7\text{ m}$$

Aplique la ecuación 1) para encontrar la rapidez del satélite:

$$v = \sqrt{\frac{(6.67 \times 10^{-11}\ \mathrm{N \cdot m^2/kg^2})(5.98 \times 10^{24}\ \mathrm{kg})}{4.23 \times 10^{7}\ \mathrm{m}}}$$

$$= \boxed{3.07 \times 10^{3}\ \mathrm{m/s}}$$

Finalizar El valor de r calculado en este caso se traduce en una altura del satélite sobre la superficie de la Tierra de casi 36 000 km. Por lo tanto, los satélites geosíncronos tienen la ventaja de permitir que una antena fija en tierra se apunte en una dirección fija, pero hay una desventaja en que las señales entre la Tierra y el satélite deban viajar una distancia más larga. Es difícil usar satélites síncronos para observación óptica de la superficie de la Tierra debido a su gran altura.

¿Qué pasaría si? ¿Y si el movimiento del satélite en el inciso A) tuviera lugar a una altura h sobre la superficie de otro planeta más pesado que la Tierra, pero del mismo radio? ¿El satélite se movería con mayor o menor rapidez de la que se mueve alrededor de la Tierra?

Respuesta Si el planeta ejerce una mayor fuerza gravitacional sobre el satélite debido a su mayor masa, el satélite debe moverse con una mayor rapidez para evitar moverse hacia la superficie. Esta conclusión es consistente con las predicciones de la ecuación 1), que muestran, porque la rapidez v es proporcional a la raíz cuadrada de la masa del planeta, que la rapidez aumenta conforme la masa del planeta aumenta.

13.4 El campo gravitacional

Cuando Newton publicó su teoría de la gravitación universal, tuvo una excelente aceptación porque explicaba satisfactoriamente el movimiento de los planetas. Desde 1687, la misma teoría se ha usado para explicar los movimientos de cometas, la desviación de una balanza Cavendish, las órbitas de estrellas binarias y la rotación de las galaxias. Sin embargo, tanto los contemporáneos de Newton como las generaciones siguientes han encontrado difícil de aceptar el concepto de una fuerza que actúa a distancia; la pregunta es: ¿cómo es posible que dos objetos interactúen cuando no están en contacto?. Newton mismo no pudo responder esta pregunta.

Un planteamiento para describir las interacciones entre los objetos que no están en contacto apareció mucho después de la muerte de Newton. Esta aproximación permite una forma diferente de observar la interacción gravitacional, al usar el concepto de **campo gravitacional** que existe en cada punto del espacio. Cuando una partícula de masa m se coloca en un punto donde el campo gravitacional es $\vec{\mathbf{g}}$, la partícula experimenta una fuerza $\vec{\mathbf{F}}_g = m\vec{\mathbf{g}}$. En otras palabras, piense que el campo ejerce una fuerza sobre la partícula en lugar de considerar una interacción directa entre dos partículas. El campo gravitacional $\vec{\mathbf{g}}$ se define como

Campo gravitacional ▶

$$\vec{\mathbf{g}} \equiv \frac{\vec{\mathbf{F}}_g}{m} \qquad (13.9)$$

Es decir: el campo gravitacional en un punto del espacio es igual a la fuerza gravitacional que experimenta una *partícula de prueba* colocada en dicho punto, dividida entre la masa de la partícula de prueba. Al objeto que crea el campo se le llama *partícula fuente.* (Aunque la Tierra no es una partícula, es posible demostrar que la Tierra se puede modelar como una partícula con el propósito de encontrar el campo gravitacional que crea.) Note que la presencia de la partícula de prueba no es necesaria para que el campo exista: la partícula fuente crea el campo gravitacional. Es posible detectar la presencia del campo y medir su intensidad al colocar una partícula de prueba en el campo y notar la fuerza que se ejerce sobre ella. En esencia, lo que se describe es el "efecto" que cualquier objeto (en este caso, la Tierra) tiene en el espacio vacío alrededor de sí mismo en términos de la fuerza que *estaría* presente *si* un segundo objeto estuviese en alguna parte en dicho espacio.[4]

[4] Se regresará a esta idea de una masa que afecta al espacio a su alrededor cuando se analice la teoría de gravitación de Einstein en el capítulo 39.

Para ejemplificar cómo funciona el concepto de campo, considere un objeto de masa m cerca de la superficie de la Tierra. Ya que la fuerza gravitacional que actúa sobre el objeto tiene una magnitud GM_Tm/r^2 (ecuación 13.4), el campo $\vec{\mathbf{g}}$ a una distancia r del centro de la Tierra es

$$\vec{\mathbf{g}} = \frac{\vec{\mathbf{F}}_g}{m} = -\frac{GM_T}{r^2}\,\hat{\mathbf{r}} \tag{13.10}$$

donde $\hat{\mathbf{r}}$ es un vector unitario que apunta radialmente hacia afuera de la Tierra y el signo negativo indica que el campo apunta hacia el centro de la Tierra, como se ilustra en la figura 13.9a. Los vectores de campo en diferentes puntos alrededor de la Tierra varían tanto en dirección como en magnitud. En una pequeña región cerca de la superficie de la Tierra, el campo hacia abajo $\vec{\mathbf{g}}$ es aproximadamente constante y uniforme, como se indica en la figura 13.9b. La ecuación 13.10 es válida en todos los puntos *afuera* de la superficie de la Tierra, si se supone que la Tierra es esférica. En la superficie de la Tierra, donde $r = R_T$, $\vec{\mathbf{g}}$ tiene una magnitud de 9.80 N/kg. (La unidad N/kg es la misma que m/s^2.)

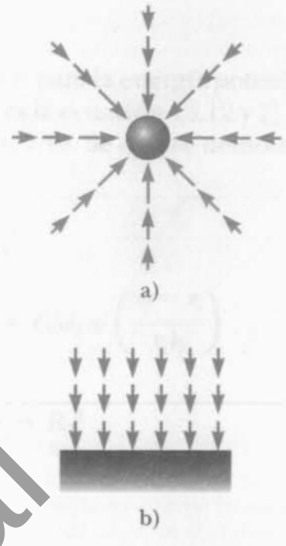

Figura 13.9 a) Los vectores de campo gravitacional cercanos a una masa esférica uniforme como la Tierra varían tanto en dirección como en magnitud. Los vectores apuntan en la dirección de la aceleración que experimentaría una partícula si se colocara en el campo. La magnitud del vector de campo en cualquier ubicación es la magnitud de la aceleración de caída libre en dicha ubicación. b) Los vectores de campo gravitacional en una pequeña región cerca de la superficie de la Tierra son uniformes tanto en dirección como en magnitud.

13.5 Energía potencial gravitacional

En el capítulo 8 se introdujo el concepto de energía potencial gravitacional, que es la energía asociada con la configuración de un sistema de objetos que interactúan mediante la fuerza gravitacional. Se enfatizó que la función de energía potencial gravitacional mgy para un sistema partícula–Tierra sólo es válida cuando la partícula está cerca de la superficie de la Tierra, donde la fuerza gravitacional es constante. Ya que la fuerza gravitacional entre dos partículas varía con $1/r^2$, se espera que una función de energía potencial más general, una que es válida sin la restricción de tener que estar cerca de la superficie de la Tierra, será diferente de $U = mgy$.

Recuerde de la ecuación 7.26 que el cambio en la energía potencial gravitacional de un sistema asociado con un desplazamiento de un integrante del sistema se define como el negativo del trabajo realizado por la fuerza gravitacional sobre dicho integrante durante el desplazamiento:

$$\Delta U = U_f - U_i = -\int_{r_i}^{r_f} F(r)\,dr \tag{13.11}$$

Se puede usar este resultado para evaluar la función de energía potencial gravitacional. Considere una partícula de masa m que se mueve entre dos puntos Ⓐ y Ⓑ sobre la superficie de la Tierra (figura 13.10). La partícula está sujeta a la fuerza gravitacional conocida por la ecuación 13.1. Esta fuerza se expresa como

$$F(r) = -\frac{GM_Tm}{r^2}$$

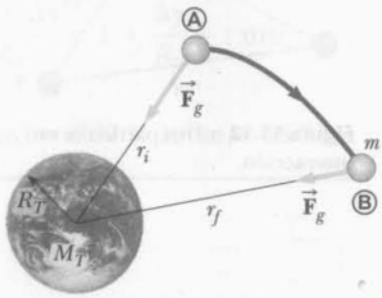

Figura 13.10 A medida que una partícula de masa m se mueve de Ⓐ a Ⓑ sobre la superficie de la Tierra, la energía potencial gravitacional del sistema partícula–Tierra cambia de acuerdo con la ecuación 13.12.

donde el signo negativo indica que la fuerza es de atracción. Al sustituir esta expresión para $F(r)$ en la ecuación 13.11, se puede calcular el cambio en la función de energía potencial gravitacional para el sistema partícula–Tierra:

$$U_f - U_i = GM_Tm\int_{r_i}^{r_f}\frac{dr}{r^2} = GM_Tm\left[-\frac{1}{r}\right]_{r_i}^{r_f}$$

$$U_f - U_i = -GM_Tm\left(\frac{1}{r_f} - \frac{1}{r_i}\right) \tag{13.12}$$

Como siempre, la elección de una configuración de referencia para la energía potencial es por completo arbitraria. Se acostumbra elegir la configuración de referencia para energía potencial cero como la misma para la cual la fuerza es cero. Al considerar $U_i = 0$ en $r_i = \infty$, se obtiene el importante resultado

$$\boxed{U(r) = -\frac{GM_Tm}{r}} \tag{13.13}$$

◄ Energía potencial gravitacional del sistema Tierra–partícula

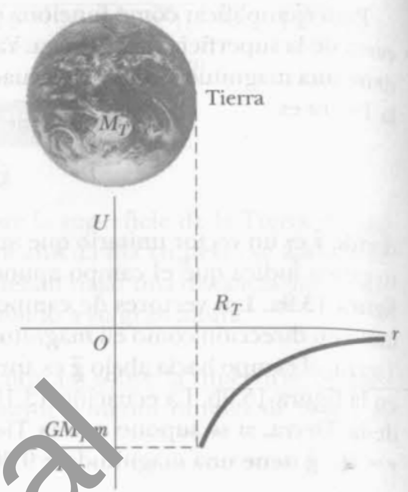

Figura 13.11 Gráfica de la energía potencial gravitacional U en función de r para el sistema de un objeto sobre la superficie de la Tierra. La energía potencial tiende a cero a medida que r tiende a infinito.

Esta expresión se aplica cuando la partícula está separada del centro de la Tierra una distancia r, siempre que $r \geq R_T$. El resultado no es válido para partículas dentro de la Tierra, donde $r < R_T$. Dada la elección de U_i, la función U siempre es negativa (figura 13.11).

Aunque la ecuación 13.13 se dedujo para el sistema partícula–Tierra, se puede aplicar a dos partículas cualesquiera. Esto es, la energía potencial gravitacional asociada con cualquier par de partículas de masas m_1 y m_2 separadas una distancia r es

$$U = -\frac{Gm_1 m_2}{r} \qquad (13.14)$$

Esta expresión muestra que la energía potencial gravitacional para cualquier par de partículas varía como $1/r$, mientras que la fuerza entre ellas varía como $1/r^2$. Además, la energía potencial es negativa porque la fuerza es de atracción y se eligió la energía potencial como cero cuando la separación de las partículas es infinita. Debido a que la fuerza entre las partículas es de atracción, un agente externo debe hacer trabajo positivo para aumentar la separación entre ellas. El trabajo realizado por el agente externo produce un aumento en la energía potencial conforme se separan las dos partículas. Es decir: U se vuelve menos negativa a medida que r aumenta.

Cuando dos partículas están en reposo y separadas por una distancia r, un agente externo tiene que suministrar una energía al menos igual a $+Gm_1 m_2/r$ para separar las partículas a una distancia infinita. Por lo tanto es conveniente pensar en el valor absoluto de la energía potencial como la *energía de unión* del sistema. Si el agente externo suministra una energía mayor que la energía de unión, la energía en exceso del sistema está en la forma de energía cinética de las partículas cuando las partículas están en una separación infinita.

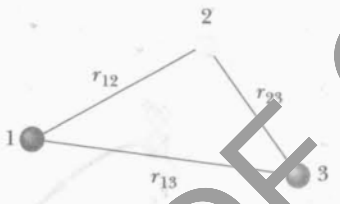

Figura 13.12 Tres partículas en interacción.

Es posible extender este concepto a tres o más partículas. En este caso, la energía potencial total del sistema es la suma sobre todos los pares de partículas. Cada par aporta un término de la forma conocida por la ecuación 13.14. Por ejemplo, si el sistema contiene tres partículas como en la figura 13.12,

$$U_{\text{total}} = U_{12} + U_{13} + U_{23} = -G\left(\frac{m_1 m_2}{r_{12}} + \frac{m_1 m_3}{r_{13}} + \frac{m_2 m_3}{r_{23}}\right) \qquad (13.15)$$

El valor absoluto de U_{total} representa el trabajo necesario para separar las partículas una distancia infinita.

EJEMPLO 13.6 **El cambio en energía potencial**

Una partícula de masa m se desplaza a través de una pequeña distancia vertical Δy cerca de la superficie de la Tierra. Demuestre que en esta situación la expresión general para el cambio en energía potencial gravitacional conocida por la ecuación 13.12 se reduce a la correspondencia familiar $\Delta U = mg\,\Delta y$.

SOLUCIÓN

Conceptualizar Compare las dos diferentes situaciones para las que se desarrollaron expresiones para la energía potencial gravitacional: 1) un planeta y un objeto que están separados, la expresión de energía para ellos es la ecuación 13.12 y 2) un objeto pequeño en la superficie de un planeta, la expresión de energía para ellos es la ecuación 7.19. Se quiere demostrar que estas dos expresiones son equivalentes.

Categorizar Este ejemplo es un problema de sustitución.

Combine las fracciones en la ecuación 13.12:

$$1)\quad \Delta U = -GM_T m\left(\frac{1}{r_f} - \frac{1}{r_i}\right) = GM_T m\left(\frac{r_f - r_i}{r_i r_f}\right)$$

Evalúe $r_f - r_i$ y $r_i r_f$ si tanto la posición inicial como final de la partícula están cerca de la superficie de la Tierra:

$$r_f - r_i = \Delta y \qquad r_i r_f \approx R_T^{\,2}$$

Sustituya estas expresiones en la ecuación 1):

$$\Delta U \approx \frac{GM_T m}{R_T^{\,2}}\Delta y = mg\,\Delta y$$

donde $g = GM_T/R_T^{\,2}$ (ecuación 13.5).

¿Qué pasaría si? Suponga que usted realiza estudios en la atmósfera superior y su supervisor le pregunta encontrar la altura en la atmósfera terrestre a la cual la "ecuación de superficie" $\Delta U = mg\,\Delta y$ da un error de 1.0% en el cambio en la energía potencial. ¿Cuál es esta altura?

Respuesta Ya que la ecuación de superficie supone un valor constante para g, dará un valor ΔU que es mayor que el valor conocido por la ecuación general, ecuación 13.12.

Establezca una relación que refleje un error de 1.0%:

$$\frac{\Delta U_{\text{superficie}}}{\Delta U_{\text{general}}} = 1.010$$

Sustituya las expresiones para cada uno de estos cambios ΔU:

$$\frac{mg\,\Delta y}{GM_T m(\Delta y/r_i r_f)} = \frac{g r_i r_f}{GM_T} = 1.010$$

Sustituya para r_i, r_f y g de la ecuación 13.5:

$$\frac{(GM_T/R_T^{\,2})R_T(R_T + \Delta y)}{GM_T} = \frac{R_T + \Delta y}{R_T} = 1 + \frac{\Delta y}{R_T} = 1.010$$

Resuelva para Δy:

$$\Delta y = 0.010 R_T = 0.010(6.37 \times 10^6 \text{ m}) = 6.37 \times 10^4 \text{ m} = 63.7 \text{ km}$$

13.6 Consideraciones energéticas en el movimiento planetario y de satélites

Considere un objeto de masa m que se mueve con una rapidez v en la vecindad de un objeto pesado de masa M, donde $M >> m$. El sistema puede ser un planeta que se mueve alrededor del Sol, un satélite en órbita alrededor de la Tierra o un cometa que hace un vuelo una sola vez alrededor del Sol. Si supone que el objeto de masa M está en reposo en un marco de referencia inercial, la energía mecánica total E del sistema de dos objetos, cuando los objetos están separados una distancia r, es la suma de la energía cinética del objeto de masa m y la energía potencial del sistema, conocida por la ecuación 13.14:

$$E = K + U$$

$$E = \tfrac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{r} \qquad (13.16)$$

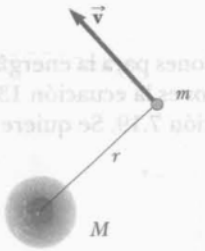

Figura 13.13 Un objeto de masa *m* que se mueve en una órbita circular en torno a un objeto mucho mayor de masa *M*.

La ecuación 13.16 muestra que E puede ser positiva, negativa o cero, dependiendo del valor de v. Sin embargo, para un sistema ligado como el sistema Tierra–Sol, E necesariamente *es menor que cero* porque se eligió la convención de que $U \rightarrow 0$ conforme $r \rightarrow \infty$.

Fácilmente se puede establecer que $E < 0$ para el sistema que consiste de un objeto de masa m que se mueve en una órbita circular alrededor de un objeto de masa $M >> m$ (figura 13.13). La segunda ley de Newton aplicada al objeto de masa m produce

$$F_g = \frac{GMm}{r^2} = ma = \frac{mv^2}{r}$$

Al multiplicar ambos lados por r y dividir entre 2 se obtiene

$$\tfrac{1}{2}mv^2 = \frac{GMm}{2r} \qquad (13.17)$$

Al sustituir esta ecuación en la ecuación 13.16 se obtiene

$$E = \frac{GMm}{2r} - \frac{GMm}{r}$$

Energía total para órbitas circulares

$$E = -\frac{GMm}{2r} \quad \text{(órbitas circulares)} \qquad (13.18)$$

Este resultado muestra que **la energía mecánica total es negativa en el caso de órbitas circulares.** Note que **la energía cinética es positiva e igual a la mitad del valor absoluto de la energía potencial.** El valor absoluto de E también es igual a la energía de enlace del sistema, porque esta cantidad de energía debe proporcionarse al sistema para separar los dos objetos infinitamente.

La energía mecánica total también es negativa en el caso de órbitas elípticas. La expresión para E para órbitas elípticas es la misma que la ecuación 13.18, con r sustituida por la longitud del semieje mayor a:

Energía total para órbitas elípticas

$$E = -\frac{GMm}{2a} \quad \text{(órbitas elípticas)} \qquad (13.19)$$

Además, la energía total es constante si se supone que el sistema está aislado. Por lo tanto, conforme el objeto de masas m se mueve de Ⓐ a Ⓑ en la figura 13.10, la energía total permanece constante y la ecuación 13.16 produce

$$E = \tfrac{1}{2}mv_i^2 - \frac{GMm}{r_i} = \tfrac{1}{2}mv_f^2 - \frac{GMm}{r_f} \qquad (13.20)$$

Al combinar este enunciado de conservación de energía con la explicación anterior acerca de la conservación de la cantidad de movimiento angular, se ve qué **tanto la energía total como la cantidad de movimiento angular total de un sistema de dos objetos gravitacionalmente ligados son constantes del movimiento.**

Pregunta rápida 13.4 Un cometa se mueve en una órbita elíptica alrededor del Sol. ¿Cuál punto en su órbita (perihelio o afelio) representa el valor más alto de a) la rapidez del cometa, b) la energía potencial del sistema cometa–Sol, c) la energía cinética del cometa y d) la energía total del sistema cometa–Sol?

EJEMPLO 13.7 **Cambio de la órbita de un satélite**

Un vehículo de transporte espacial libera un satélite de comunicaciones de 470 kg mientras está en órbita a 280 km sobre la superficie de la Tierra. Un motor cohete en el satélite lo pone en una órbita geosíncrona. ¿Cuánta energía debe proporcionar el motor?

SOLUCIÓN

Conceptualizar Note que la altura de 280 km es mucho más baja que la de un satélite geosíncrono, 36 000 km, como se mencionó en el ejemplo 13.5. Por lo tanto, se debe gastar energía para elevar el satélite a esta posición mucho más alta.

Categorizar Este ejemplo es un problema de sustitución.

Encuentre el radio inicial de la órbita del satélite cuando aún está en la bahía de carga del trasbordador:

$$r_i = R_T + 280 \text{ km} = 6.65 \times 10^6 \text{ m}$$

Aplique la ecuación 13.18 para encontrar la diferencia en energías para el sistema satélite–Tierra con el satélite en los radios inicial y final:

$$\Delta E = E_f - E_i = -\frac{GM_Tm}{2r_f} - \left(-\frac{GM_Tm}{2r_i}\right) = -\frac{GM_Tm}{2}\left(\frac{1}{r_f} - \frac{1}{r_i}\right)$$

Sustituya valores numéricos usando $r_f = 4.23 \times 10^7$ m del ejemplo 13.5:

$$\Delta E = -\frac{(6.67 \times 10^{-11} \text{ N}\cdot\text{m}^2/\text{kg}^2)(5.98 \times 10^{24} \text{ kg})(470 \text{ kg})}{2}$$

$$\times \left(\frac{1}{4.23 \times 10^7 \text{ m}} - \frac{1}{6.65 \times 10^6 \text{ m}}\right)$$

$$= \boxed{1.19 \times 10^{10} \text{ J}}$$

que es la energía equivalente a 89 galones de gasolina. Los ingenieros de la NASA deben tomar en cuenta el cambio de masa de la nave mientras expulsa combustible quemado, algo que no se hizo en este caso. ¿Esperaría que al incluir dicho cálculo el efecto de esta masa cambiante, produzca una cantidad de energía mayor o menor que la requerida por el motor?

Rapidez de escape

Suponga que un objeto de masa m se proyecta verticalmente hacia arriba desde la superficie de la Tierra con una rapidez inicial v_i, como se ilustra en la figura 13.14. Es posible usar consideraciones energéticas para encontrar el valor mínimo de la rapidez inicial necesaria para permitir al objeto moverse infinitamente lejos de la Tierra. La ecuación 13.16 da la energía total del sistema en cualquier punto. En la superficie de la Tierra, $v = v_i$ y $r = r_i = R_T$. Cuando el objeto alcanza su altura máxima, $v = v_f = 0$ y $r = r_f = r_{\text{máx}}$. Ya que la energía total del sistema objeto–Tierra se conserva, sustituir estas condiciones en la ecuación 13.20 produce

$$\tfrac{1}{2}mv_i^2 - \frac{GM_Tm}{R_T} = -\frac{GM_Tm}{r_{\text{máx}}}$$

Al resolver para v_i^2 se obtiene

$$v_i^2 = 2GM_T\left(\frac{1}{R_T} - \frac{1}{r_{\text{máx}}}\right) \qquad \textbf{(13.21)}$$

Para una altura máxima dada $h = r_{\text{máx}} - R_T$, se puede usar esta ecuación para encontrar la rapidez inicial requerida.

Ahora está en posición de calcular la rapidez de escape, que es la rapidez mínima que debe tener el objeto en la superficie de la Tierra para aproximarse a una distancia de separación infinita desde la Tierra. Al viajar con esta rapidez mínima, el objeto continúa moviéndose cada vez más lejos de la Tierra conforme su rapidez se aproxima asintóticamente a cero. Al hacer $r_{\text{máx}} \to \infty$ en la ecuación 13.21 y tomar $v_i = v_{\text{esc}}$ se obtiene

$$\boxed{v_{\text{esc}} = \sqrt{\frac{2GM_T}{R_T}}} \qquad \textbf{(13.22)}$$

Esta expresión para v_{esc} es independiente de la masa del objeto. En otras palabras, una nave espacial tiene la misma rapidez de escape que una molécula. Además, el resultado es independiente de la dirección de la velocidad e ignora la resistencia del aire.

Si al objeto se le da una rapidez inicial igual a v_{esc}, la energía total del sistema es igual a cero. Note que, cuando $r \to \infty$, la energía cinética del objeto y la energía potencial del sistema son cero. Si v_i es mayor que v_{esc}, la energía total del sistema es mayor que cero y el objeto tiene alguna energía cinética residual conforme $r \to \infty$.

Figura 13.14 Un objecto de masa m es proyectado hacia arriba desde la superficie de la Tierra, con una velocidad inicial v_i alcanzando una altura máxima h.

PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 13.3

En realidad no puede escapar

Aunque la ecuación 13.22 proporciona la "rapidez de escape" de la Tierra, escapar por *completo* de la influencia gravitacional de la Tierra es imposible porque la fuerza gravitacional es de alcance infinito. No importa qué tan lejos esté, siempre sentirá alguna fuerza gravitacional debida a la Tierra.

EJEMPLO 13.8 Rapidez de escape de un cohete

Calcule la rapidez de escape de la Tierra para una nave espacial de 5 000 kg y determine la energía cinética que debe tener en la superficie de la Tierra para moverse infinitamente lejos de la Tierra.

SOLUCIÓN

Conceptualizar Imagine proyectar la nave espacial desde la superficie de la Tierra de modo que se mueva cada vez más lejos, viajando más y más lentamente, con su rapidez tendiendo a cero. Sin embargo, su rapidez nunca llegará a cero, así que el objeto nunca dará vuelta y regresará.

Categorizar Este ejemplo es un problema de sustitución.

Aplique la ecuación 13.22 para encontrar la rapidez de escape:

$$v_{esc} = \sqrt{\frac{2GM_T}{R_T}} = \sqrt{\frac{2(6.67 \times 10^{-11}\ \mathrm{N \cdot m^2/kg^2})(5.98 \times 10^{24}\ \mathrm{kg})}{6.37 \times 10^6\ \mathrm{m}}}$$

$$= \boxed{1.12 \times 10^4\ \mathrm{m/s}}$$

Evalúe la energía cinética de la nave espacial a partir de la ecuación 7.16:

$$K = \tfrac{1}{2}mv_{esc}^2 = \tfrac{1}{2}(5.00 \times 10^3\ \mathrm{kg})(1.12 \times 10^4\ \mathrm{m/s})^2$$

$$= \boxed{3.14 \times 10^{11}\ \mathrm{J}}$$

La rapidez de escape calculada corresponde más o menos a 25 000 mi/h. La energía cinética de la nave espacial es equivalente a la energía liberada por la combustión de aproximadamente 2 300 galones de gasolina.

¿Qué pasaría si? ¿Y si quiere lanzar una nave espacial de 1 000 kg a la rapidez de escape? ¿Cuánta energía requeriría eso?

Respuesta En la ecuación 13.22, la masa del objeto que se mueve con la rapidez de escape no aparece. Por lo tanto, la rapidez de escape para la nave de 1 000 kg es la misma que la de la nave de 5 000 kg. El único cambio en la energía cinética se debe a la masa, así que la nave de 1 000 kg requiere un quinto de la energía de la nave de 5 000 kg:

$$K = \tfrac{1}{5}(3.14 \times 10^{11}\ \mathrm{J}) = 6.28 \times 10^{10}\ \mathrm{J}$$

Las ecuaciones 13.21 y 13.22 se pueden aplicar a objetos proyectados desde cualquier planeta. Es decir, en general, la rapidez de escape de la superficie de cualquier planeta de masa M y radio R es

$$v_{esc} = \sqrt{\frac{2GM}{R}} \tag{13.23}$$

En la tabla 13.3 se proporcionan magnitudes de velocidad de escape para los planetas, la Luna y el Sol. Los valores varían de 2.3 km/s para la Luna a más o menos 618 km/s para el Sol. Estos resultados, junto con algunas ideas de la teoría cinética de los gases (véase el capítulo 21), explican por qué algunos planetas tienen atmósferas y otros no. Como se verá más adelante, a una cierta temperatura, la energía cinética promedio de una molécula de gas sólo depende de la masa de la molécula. Las moléculas más ligeras, como el hidrógeno y el helio, tienen una rapidez promedio mayor que las moléculas más pesadas a la misma temperatura. Cuando la rapidez promedio de las moléculas más ligeras no es en mucho menor que la rapidez de escape de un planeta, una fracción significativa de ellas tienen oportunidad de escapar.

Este mecanismo también explica por qué la Tierra no retiene moléculas de hidrógeno y átomos de helio en su atmósfera pero sí retiene moléculas más pesadas, como oxígeno y nitrógeno. Por otra parte, la rapidez de escape de Júpiter es tan grande que permite que el planeta retenga hidrógeno, el principal componente de su atmósfera.

TABLA 13.3
Magnitudes de velocidad de escape de las superficies de los planetas, Luna y Sol

Planeta	v_{esc} (km/s)
Mercurio	4.3
Venus	10.3
Tierra	11.2
Marte	5.0
Júpiter	60
Saturno	36
Urano	22
Neptuno	24
Luna	2.3
Sol	618

Hoyos negros

En el ejemplo 11.7, se describió brevemente un raro evento llamado supernova, la explosión catastrófica de una estrella muy pesada. El material que permanece en el núcleo central de tal objeto continúa colapsándose y el destino final del núcleo depende de su masa. Si el núcleo tiene una masa menor a 1.4 veces la masa de nuestro Sol, gradualmente se enfría y termina su vida como una estrella enana blanca. Sin embargo, si la masa del núcleo es mayor a este valor, puede colapsar aún más debido a fuerzas gravitacionales. Lo que queda es una estrella de neutrones, que se explicó en el ejemplo 11.7, en el que la masa de una estrella se comprime a un radio de casi 10 km. (En la Tierra, ¡una cucharadita de este material pesaría alrededor de 5 mil millones de toneladas!)

Una muerte estelar todavía más inusual puede presentarse cuando el núcleo tiene una masa mayor que aproximadamente tres masas solares. El colapso puede continuar hasta que la estrella se convierta en un objeto muy pequeño en el espacio, al que comúnmente se le conoce como **hoyo negro**. En efecto, los hoyos negros son restos de estrellas que colapsaron bajo su propia fuerza gravitacional. Si un objeto como una nave espacial se acerca a un hoyo negro, el objeto se somete a una fuerza gravitacional extremadamente intensa y queda atrapado para siempre.

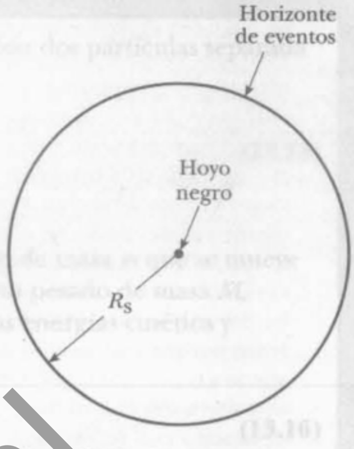

Figura 13.15 Un hoyo negro. La distancia R_S es igual al radio de Schwarzschild. Cualquier evento que ocurra dentro de la frontera del radio R_S, llamada el horizonte de eventos, es invisible a un observador externo.

La rapidez de escape para un hoyo negro es muy alta debido a la concentración de la masa de la estrella en una esfera de radio muy pequeño (véase la ecuación 13.23). Si la rapidez de escape supera la rapidez de la luz c, la radiación del objeto (tal como la luz visible) no puede escapar y el objeto parece ser negro (de ahí el origen del término "hoyo negro"). El radio crítico R_S en que la rapidez de escape es c se llama **radio de Schwarzschild** (figura 13.15). La superficie imaginaria de una esfera de este radio que rodea al hoyo negro se llama **horizonte de eventos**, que es el límite de qué tan cerca se puede aproximar al hoyo negro y le es posible escapar.

Aunque la luz de un hoyo negro no puede escapar, la luz de los eventos que tienen lugar cerca del hoyo negro debe ser visible. Por ejemplo, es posible que un sistema de estrella binaria que consiste de una estrella normal y un hoyo negro. El material que rodea la estrella ordinaria se puede jalar hacia el hoyo negro, lo que forma un **disco de acrecentamiento** alrededor del hoyo negro, como sugiere la figura 13.16. La fricción entre partículas en el disco de acreción resulta en transformación de energía mecánica en energía interna. Como resultado, se eleva la temperatura del material sobre el horizonte de eventos. Este material de alta temperatura emite una gran cantidad de radiación y se extiende bien en la región de rayos X del espectro electromagnético. Estos rayos X son característicos de un hoyo negro. Por la observación de estos rayos X se han identificado muchos posibles candidatos para hoyos negros.

También hay evidencia de que en los centros de las galaxias existen hoyos negros superpesados, con masas mucho mayores que la del Sol. (Hay evidencia de un hoyo negro superpesado con masa de 2-3 millones de masas solares en el centro de nuestra galaxia.) Modelos teóricos para estos extraños objetos predicen que chorros de material deben ser evidentes a lo largo del eje de rotación del hoyo negro. La figura 13.17 (página 380) muestra una fotografía del Telescopio Espacial Hubble de la galaxia M87. Se considera que el chorro de material que proviene de esta galaxia es evidencia de un hoyo negro superpesado en el centro de la galaxia.

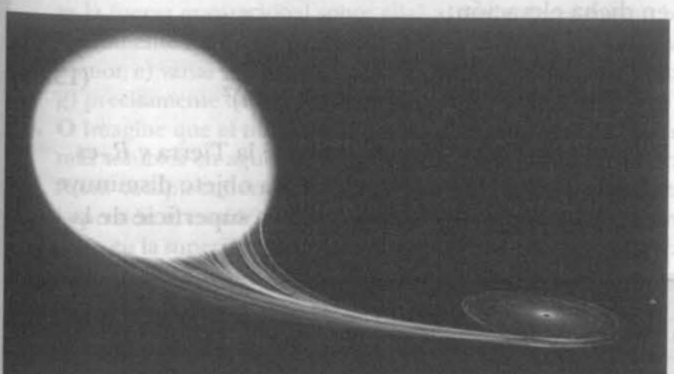

Figura 13.16 Un sistema de estrella binaria consiste de una estrella ordinaria a la izquierda y un hoyo negro a la derecha. La materia que se jala de la estrella ordinaria forma un disco de acreción alrededor del hoyo negro, en el que la materia se eleva a temperaturas muy altas, lo que resulta en la emisión de rayos X.

Figura 13.17 Imágenes del Telescopio Espacial Hubble de la galaxia M87. La inserción muestra el centro de la galaxia. La imagen más ancha muestra un chorro de material que se aleja del centro de la galaxia hacia arriba a la derecha de la figura a aproximadamente un décimo la rapidez de la luz. Se cree que tales chorros son evidencia de un hoyo negro supermasivo en el centro de la galaxia.

Resumen

DEFINICIONES

El **campo gravitacional** en un punto en el espacio se define como la fuerza gravitacional que experimenta cualquier partícula de prueba ubicada en dicho punto, dividida entre la masa de la partícula de prueba:

$$\vec{\mathbf{g}} \equiv \frac{\vec{\mathbf{F}}_g}{m} \tag{13.9}$$

CONCEPTOS Y PRINCIPIOS

La **ley de Newton de gravitación universal** afirma que la fuerza de atracción gravitacional entre dos partículas cualesquiera de masas m_1 y m_2 separadas por una distancia r tiene la magnitud

$$F_g = G\frac{m_1 m_2}{r^2} \tag{13.1}$$

donde $G = 6.673 \times 10^{-11}\ \mathrm{N \cdot m^2/kg^2}$ es la **constante gravitacional universal**. Esta ecuación permite calcular la fuerza de atracción entre masas bajo muchas circunstancias.

Un objeto a una distancia h sobre la superficie de la Tierra experimenta una fuerza gravitacional de magnitud mg, donde g es la aceleración en caída libre en dicha elevación:

$$g = \frac{GM_T}{r^2} = \frac{GM_T}{(R_T + h)^2} \tag{13.6}$$

En esta expresión, M_T es la masa de la Tierra y R_T es su radio. Por lo tanto, el peso de un objeto disminuye a medida que el objeto se aleja de la superficie de la Tierra.

(*continúa*)

Las **leyes de Kepler de movimiento planetario** afirman que:

1. Todos los planetas se mueven en órbitas elípticas con el Sol en un foco.
2. El radio vector que se dibuja desde el Sol hacia un planeta barre áreas iguales en intervalos de tiempo iguales.
3. El cuadrado del periodo orbital de cualquier planeta es proporcional al cubo del semieje mayor de la órbita elíptica.

La tercera ley de Kepler se puede expresar como

$$T^2 = \left(\frac{4\pi^2}{GM_S}\right)a^3 \qquad \textbf{(13.8)}$$

donde M_S es la masa del Sol y a es el semieje mayor. Para una órbita circular, a se puede sustituir en la ecuación 13.8 por el radio r. La mayoría de los planetas tiene órbitas casi circulares alrededor del Sol.

La **energía potencial gravitacional** asociada con dos partículas separada una distancia r es

$$U = -\frac{Gm_1m_2}{r} \qquad \textbf{(13.14)}$$

donde U se considera cero conforme $r \rightarrow \infty$.

Si un sistema aislado consiste en un objeto de masa m que se mueve con una rapidez v en la vecindad de un objeto pesado de masa M, la energía total E del sistema es la suma de las energías cinética y potencial:

$$E = \tfrac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{r} \qquad \textbf{(13.16)}$$

La energía total del sistema es una constante del movimiento. Si el objeto se mueve en una órbita elíptica con semieje mayor a alrededor del objeto pesado y $M >> m$, la energía total del sistema es

$$E = -\frac{GMm}{2a} \qquad \textbf{(13.19)}$$

Para una órbita circular esta misma ecuación se aplica con $a = r$.

La **rapidez de escape** para un objeto que se proyecta desde la superficie de un planeta de masa M y radio R es

$$v_{\text{esc}} = \sqrt{\frac{2GM}{R}} \qquad \textbf{(13.23)}$$

Preguntas

O indica pregunta complementaria.

1. **O** Clasifique las magnitudes de las siguientes fuerzas gravitacionales de mayor a menor. Si dos fuerzas son iguales, muestre dicha igualdad en su lista. a) La fuerza que ejerce un objeto de 2 kg sobre un objeto de 3 kg separados 1 m. b) La fuerza que ejerce un objeto de 2 kg sobre un objeto de 9 kg separados 1 m. c) La fuerza que ejerce un objeto de 2 kg sobre un objeto de 9 kg separados 2 m. d) La fuerza que ejerce un objeto de 9 kg sobre un objeto de 2 kg separados 2 m. e) La fuerza que ejerce un objeto de 4 kg sobre otro objeto de 4 kg separados 2 m.
2. **O** La fuerza gravitacional que se ejerce sobre una astronauta en la superficie de la Tierra es de 650 N dirigida hacia abajo. Cuando la astronauta está en la Estación Espacial Internacional, ¿cuál es la fuerza gravitacional sobre ella? a) varias veces mayor, b) ligeramente mayor, c) precisamente la misma, d) ligeramente menor, e) varias veces menor, f) casi pero no exactamente cero, g) precisamente cero, h) arriba en lugar de abajo.
3. **O** Imagine que el nitrógeno y otros gases atmosféricos fuesen más solubles en agua de modo que la atmósfera de la Tierra fuese completamente absorbida por los océanos. Entonces la presión atmosférica sería cero y el espacio exterior comenzaría en la superficie del planeta. ¿En tal caso tendría la Tierra un campo gravitacional? a) sí; en la superficie sería mayor en magnitud que 9.8 N/kg, b) sí, en esencia sería igual que el valor actual, c) sí, sería un poco menor que 9.8 N/kg, d) sí, sería mucho menor que 9.8 N/kg, e) no.
4. La fuerza gravitacional que el Sol ejerce sobre usted es hacia abajo hacia la Tierra en la noche y hacia arriba hacia el cielo durante el día. Si tuviese una báscula de baño suficientemente sensible, ¿esperaría pesar más en la noche que durante el día? Note también que usted está más lejos del Sol en la noche que durante el día. ¿Esperaría pesar menos?
5. **O** Suponga que la aceleración gravitacional en la superficie de cierto satélite A de Júpiter es 2 m/s². El satélite B tiene el doble de masa y el doble de radio que el satélite A. ¿Cuál es la aceleración gravitacional en su superficie? a) 16 m/s², b) 8 m/s², c) 4 m/s², d) 2 m/s², e) 1 m/s², f) 0.5 m/s², g) 0.25 m/s².
6. **O** Un satélite originalmente se mueve en una órbita circular de radio R alrededor de la Tierra. Suponga que se mueve a una órbita circular de radio $4R$. **i)** ¿Qué ocurre con la fuerza ejercida sobre el satélite? a) es 16 veces mayor, b) es 8 veces mayor, c) es 4 veces mayor, d) es 2 veces mayor, e) no cambia, f) es 1/2, g) es 1/4, h) es 1/8, i) es 1/16 mayor. **ii)** ¿Qué sucede con la rapidez del satélite? Elija entre las mismas posibilidades de la a) a la i). **iii)** ¿Qué ocurre con su periodo? Elija entre las mismas posibilidades de la a) a la i).
7. **O** El equinoccio de primavera y el equinoccio de otoño se asocian con dos puntos separados 180° en la órbita de la Tierra. Esto es, la Tierra está precisamente en lados opuestos del Sol cuando pasa a través de estos dos puntos. Desde el equinoccio de primavera transcurren 185.4 días antes del equinoccio

otoñal. Sólo transcurren 179.8 días desde el equinoccio de otoño hasta el siguiente equinoccio de primavera. En el año 2007, por ejemplo, el equinoccio de primavera fue 8 minutos después de medianoche tiempo medio de Greenwich el 21 de marzo de 2007, y el equinoccio otoñal será a las 9:51 p.m. del 23 de septiembre. ¿Por qué el intervalo del equinoccio de marzo al de septiembre (que contiene el solsticio de verano) es más largo que el intervalo del equinoccio de septiembre al de marzo, en lugar de ser igual a dicho intervalo? a) Realmente son iguales, pero la Tierra gira más rápido durante el intervalo "de verano", así que los días son más cortos. b) Durante el intervalo de "verano" la Tierra se mueve más lento porque está más lejos del Sol. c) Durante el intervalo marzo a septiembre, la Tierra se mueve más lento porque está más cerca del Sol. d) La Tierra tiene menos energía cinética cuando está más caliente. e) La Tierra tiene menos cantidad de movimiento angular orbital cuando está más caliente. f) Otros objetos realizan trabajo para aumentar la velocidad y disminuir el movimiento orbital de la Tierra.

8. Un satélite en órbita alrededor de la Tierra realmente no viaja a través de un vacío. Más bien, se mueve a través de aire poco denso. ¿La fricción resultante del aire hace que el satélite frene?
9. O Un sistema consiste de cinco partículas. ¿Cuántos términos aparecen en la expresión para la energía potencial gravitacional total? a) 4, b) 5, c) 10, d) 20, e) 25, f) 120.
10. Explique por qué una nave espacial requiere más combustible para viajar de la Tierra a la Luna que de regreso. Estime la diferencia.
11. O Clasifique las siguientes cantidades de energía de mayor a menor. Establezca si algunas son iguales a) el valor absoluto de la energía potencial promedio del sistema Sol–Tierra, b) la energía cinética promedio de la Tierra en su movimiento orbital en relación con el Sol, c) el valor absoluto de la energía total del sistema Sol–Tierra.
12. ¿Por qué no se pone un satélite climatológico geosíncrono en órbita alrededor del paralelo 45? ¿Tal satélite sería más útil en Estados Unidos que uno en órbita alrededor del ecuador?
13. Explique por qué la fuerza que ejerce una esfera uniforme sobre una partícula se debe dirigir hacia el centro de la esfera. ¿Este enunciado sería verdadero si la distribución de masa de la esfera no fuera esféricamente simétrica?
14. ¿En qué posición en su órbita elíptica la rapidez de un planeta es un máximo? ¿En qué posición la rapidez es un mínimo?
15. Se le proporciona la masa y el radio del planeta X. ¿Cómo calcularía la aceleración en caída libre en la superficie de este planeta?
16. Si se pudiera cavar un hoyo hacia el centro de la Tierra, ¿la fuerza sobre un objeto de masa m todavía obedecería ahí la ecuación 13.1? ¿Cómo cree que sería la fuerza sobre m en el centro de la Tierra?
17. En su experimento de 1798, Cavendish dijo haber "pesado la Tierra". Explique esta afirmación.
18. ¿La fuerza gravitacional es una fuerza conservativa o no conservativa? Cada nave espacial *Voyager* se aceleró a la rapidez de escape del Sol mediante la fuerza gravitacional ejercida por Júpiter sobre la nave espacial. ¿La interacción de la nave espacial con Júpiter satisface la definición de una colisión elástica? ¿Cómo se podría mover más rápido la nave espacial después de la colisión?

Problemas

Sección 13.1 Ley de Newton de gravitación universal

1. Determine el orden de magnitud de la fuerza gravitacional que usted ejerce sobre otra persona a 2 m de distancia. En su solución, establezca las cantidades que mida o estime y sus valores.
2. Dos trasatlánticos, cada uno con 40 000 toneladas métricas de masa, se mueven en rutas paralelas separadas 100 m. ¿Cuál es la magnitud de la aceleración de uno de los trasatlánticos hacia el otro debido a su atracción gravitacional mutua? Modele los barcos como partículas.
3. Un objeto de 200 kg y un objeto de 500 kg están separados 0.400 m. a) Encuentre la fuerza gravitacional neta ejercida por estos objetos sobre un objeto de 50.0 kg colocado a medio camino entre ellos. b) ¿En qué posición (distinta del infinito) se puede colocar el objeto de 50.0 kg de modo que experimente una fuerza neta de cero?

Dos objetos se atraen mutuamente con una fuerza gravitacional de 1.00×10^{-8} N de magnitud cuando están separados 20.0 cm. Si la masa total de los dos objetos es 5.00 kg, ¿cuál es la masa de cada uno?

5. Tres esferas uniformes de 2.00 kg, 4.00 kg y 6.00 kg de masa se colocan en las esquinas de un triángulo rectángulo como se muestra en la figura P13.5. Calcule la fuerza gravitacional resultante sobre el objeto de 4.00 kg, si supone que las esferas están aisladas del resto del Universo.

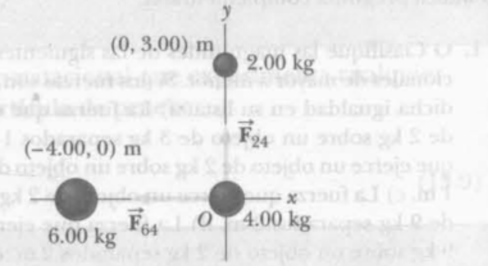

Figura P13.5

6. ● Durante un eclipse solar, la Luna, la Tierra y el Sol se encuentran en la misma línea, con la Luna entre la Tierra y el Sol. a) ¿Qué fuerza ejerce el Sol sobre la Luna? b) ¿Qué fuerza ejerce la Tierra sobre la Luna? c) ¿Qué fuerza ejerce el Sol sobre la Tierra? d) Compare las respuestas a los incisos a) y b). ¿Por qué el Sol no captura la Luna y la aleja de la Tierra?
7. En los laboratorios de introducción a la física, una balanza de Cavendish representativa para medir la constante gravitacional G usa esferas de plomo con masas de 1.50 kg y 15.0 g cuyos centros están separados aproximadamente 4.50 cm. Calcule la fuerza gravitacional entre dichas esferas y trate a cada una como una partícula ubicada en el centro de la esfera.

2 = intermedio; 3 = desafiante; ■ = razonamiento simbólico; ● = razonamiento cualitativo

● Un estudiante propone medir la constante gravitacional G al suspender dos objetos esféricos del techo de una alta catedral y medir la desviación de los cables de la vertical. Dibuje un diagrama de cuerpo libre de uno de los objetos. Suponga que dos objetos de 100.0 kg están suspendidos en los extremos inferiores de los cables de 45.00 m de largo y los cables están unidos al techo separados 1.0 m. ¿Cuál es la separación de los objetos? ¿Hay más de una distancia de separación de equilibrio? Explique.

Sección 13.2 Aceleración de caída libre y fuerza gravitacional

9. Cuando un meteoroide que cae está a una distancia sobre la superficie de la Tierra 3.00 veces el radio de la Tierra, ¿cuál es su aceleración debida a la gravitación de la Tierra?

10. **Problema de repaso.** En la figura P13.10a se muestra Miranda, un satélite de Urano. Se le puede modelar como una esfera de 242 km de radio y 6.68×10^{19} kg de masa. a) Encuentre la aceleración en caída libre sobre su superficie. b) Un risco en Miranda mide 5.00 km de alto. Aparece en el extremo de la posición que corresponde a las 11 en punto en la figura P13.10a y se amplifica en la figura P13.10b. Un fanático de los deportes extremos corre horizontalmente desde lo alto del risco a 8.50 m/s. ¿Durante qué intervalo de tiempo está en vuelo? (¿O está en órbita?) c) ¿Qué tan lejos de la base del risco vertical golpea la superficie congelada de Miranda? d) ¿Cuál es su vector de velocidad de impacto?

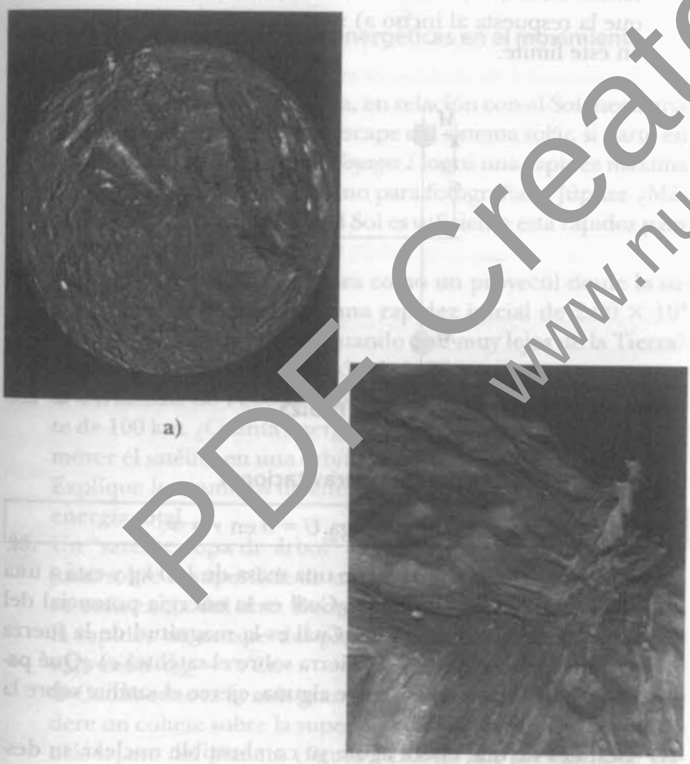

Figura P13.10

11. La aceleración en caída libre en la superficie de la Luna es aproximadamente un sexto de la que hay sobre la superficie de la Tierra. El radio de la Luna es aproximadamente $0.250R_T$. Encuentre la proporción de sus densidades promedio, $\rho_{\text{Luna}}/\rho_{\text{Tierra}}$.

Sección 13.3 Las leyes de Kepler y el movimiento de los planetas

12. ● Una partícula de masas m se mueve a lo largo de una línea recta con rapidez constante en la dirección x, a una distancia b del eje x (figura P13.12). ¿La partícula tiene alguna cantidad de movimiento angular en torno al origen? Explique por qué la cantidad de movimiento angular debe cambiar o debería permanecer constante. Demuestre que la segunda ley de Kepler se satisface al mostrar que los dos triángulos sombreados en la figura tienen la misma área cuando $t_4 - t_3 = t_2 - t_1$.

Figura P13.12

13. El sistema binario de Plaskett consiste en dos estrellas que dan vueltas en una órbita circular en torno a un centro de masa a la mitad del camino entre ellas. Este enunciado implica que las masas de las dos estrellas son iguales (figura P13.13). Suponga que la rapidez orbital de cada estrella es de 220 km/s y que el periodo orbital de cada uno es 14.4 días. Encuentre la masa M de cada estrella. (Para comparación, la masa del Sol es 1.99×10^{30} kg.)

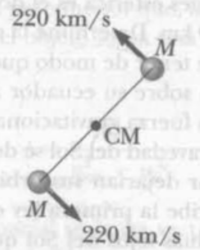

Figura P13.13

El cometa Halley (figura P13.14) se aproxima al Sol hasta dentro de 0.570 UA, y su periodo orbital es 75.6 años. (UA es el símbolo para unidad astronómica, donde 1 UA = 1.50×10^{11} m es la distancia media Tierra–Sol.) ¿Qué tan lejos del Sol viajará el cometa Halley antes de comenzar su viaje de regreso?

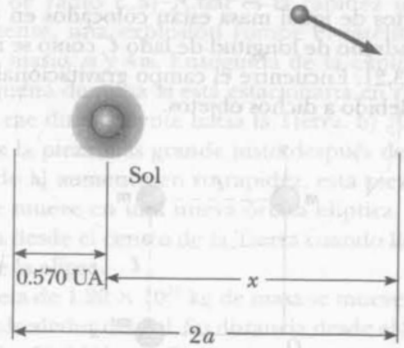

Figura P13.14

15. Io, un satélite de Júpiter, tiene un periodo orbital de 1.77 días y un radio orbital de 4.22×10^5 km. A partir de estos datos, determine la masa de Júpiter.

16. Dos planetas, X y Y, viajan en sentido contrario a las manecillas del reloj en órbitas circulares en torno a una estrella, como se muestra en la figura P13.16. Los radios de sus órbitas están en la proporción 3:1. En un momento, están alineados como se muestra en la figura P13.16a, y forman una línea recta con la estrella. Durante los siguientes cinco años, el desplazamiento angular del planeta X es 90.0°, como se muestra en la figura P13.16b. ¿Dónde está el planeta Y en este momento?

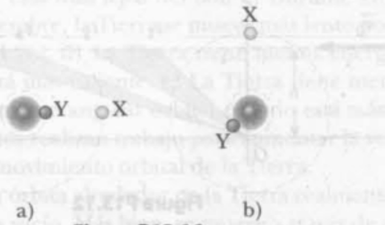

Figura P13.16

17. Un satélite síncrono, que siempre permanece arriba del mismo punto en el ecuador de un planeta, se pone en órbita alrededor de Júpiter para estudiar la famosa mancha roja. Júpiter gira una vez cada 9.84 h. Use los datos de la tabla 13.2 para encontrar la altitud del satélite.

18. Las estrellas de neutrones son objetos extremadamente densos formados a partir de los restos de explosiones supernova. Muchas giran muy rápidamente. Suponga que la masa de cierta estrella de neutrones esférica es el doble de la masa del Sol y su radio es de 10.0 km. Determine la rapidez angular máxima posible que puede tener de modo que la materia en la superficie de la estrella sobre su ecuador apenas se mantenga en órbita mediante la fuerza gravitacional.

19. Suponga que la gravedad del Sol se desconectara. Los objetos en el sistema solar dejarían sus órbitas y volarían en líneas rectas como describe la primera ley de Newton. ¿Alguna vez Mercurio estaría más lejos del Sol que Plutón? Si es así, encuentre cuánto tardaría Mercurio en lograr este tránsito. Si no, proporcione un argumento convincente de que Plutón siempre estará más lejos del Sol.

20. ● Dado que el periodo de la órbita de la Luna en torno a la Tierra es 27.32 d y la distancia casi constante entre el centro de la Tierra y el centro de la Luna es 3.84×10^8 m, use la ecuación 13.8 para calcular la masa de la Tierra. ¿Por qué es un poco más grande el valor que calcula?

Sección 13.4 El campo gravitacional

21. Tres objetos de igual masa están colocados en tres esquinas de un cuadrado de longitud de lado ℓ, como se muestra en la figura P13.21. Encuentre el campo gravitacional en la cuarta esquina debido a dichos objetos.

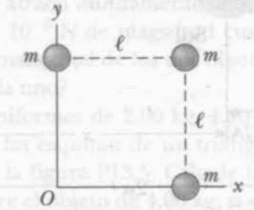

Figura P13.21

22. Una nave espacial tiene forma de un largo cilindro con una longitud de 100 m y su masa con ocupantes es de 1 000 kg. Se acercó demasiado a un hoyo negro que tiene una masa 100 veces la del Sol (figura P13.22). La nariz de la nave apunta hacia el hoyo negro y la distancia entre la nariz y el centro del hoyo negro es 10.0 km. a) Determine la fuerza total sobre la nave. b) ¿Cuál es la diferencia en los campos gravitacionales que actúan sobre los ocupantes en la nariz de la nave y sobre los que están en la parte trasera de la nave, más lejos del hoyo negro? Esta diferencia en aceleración crece rápidamente a medida que la nave se aproxima al hoyo negro. Pone al cuerpo de la nave bajo extrema tensión y al final lo rompe.

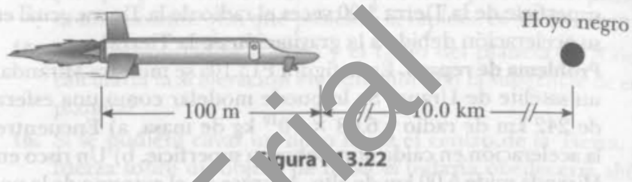

Figura P13.22

23. ● a) Calcule el vector campo gravitacional en un punto P sobre el bisector perpendicular de la línea que une dos objetos de igual masa separados por una distancia $2a$, como se muestra en la figura P13.23. b) Explique físicamente por qué el campo debe tender a cero conforme $r \rightarrow 0$. c) Pruebe matemáticamente que la respuesta del inciso a) se comporta de esta forma. d) Explique físicamente por qué la magnitud del campo debe tender a $2GM/r^2$ conforme $r \rightarrow \infty$. e) Pruebe matemáticamente que la respuesta al inciso a) se comporta de manera correcta en este límite.

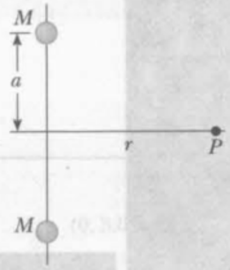

Figura P13.23

Sección 13.5 Energía potencial gravitacional

En los problemas 24–39, suponga $U = 0$ en $r = \infty$.

24. Un satélite de la Tierra tiene una masa de 100 kg y está a una altura de 2.00×10^6 m. a) ¿Cuál es la energía potencial del sistema satélite–Tierra? b) ¿Cuál es la magnitud de la fuerza gravitacional que ejerce la Tierra sobre el satélite? c) **¿Qué pasaría si?** ¿Qué fuerza, si existe alguna, ejerce el satélite sobre la Tierra?

25. Después de que el Sol agote su combustible nuclear, su destino final puede ser colapsar a un estado de *enana blanca*. En dicho estado tendría aproximadamente la misma masa que tiene ahora, pero un radio igual al de la Tierra. Calcule a) la densidad promedio de la enana blanca, b) la aceleración en caída libre en la superficie y c) la energía potencial gravitacional asociada con un objeto de 1.00 kg en su superficie.

26. En la superficie de la Tierra un proyectil se lanza recto hacia arriba con una rapidez de 10.0 km/s. ¿A qué altura se elevará? Ignore la resistencia del aire y la rotación de la Tierra.

2 = intermedio; 3 = desafiante; ■ = razonamiento simbólico; ● = razonamiento cualitativo

27. ● Un sistema consiste de tres partículas, cada una de 5.00 g de masa, ubicadas en las esquinas de un triángulo equilátero con lados de 30.0 cm. a) Calcule la energía potencial del sistema. b) Suponga que las partículas se liberan simultáneamente. Describa el movimiento consecutivo de cada una. ¿Habrá colisiones? Explique.

28. ¿Cuánto trabajo realiza el campo gravitacional de la Luna sobre un meteoro de 1 000 kg mientras viene del espacio exterior e impacta sobre la superficie de la Luna?

29. Un objeto se libera desde el reposo a una altura h sobre la superficie de la Tierra. a) Demuestre que su rapidez a una distancia r del centro de la Tierra, donde $R_T \leq r \leq R_T + h$, es

$$v = \sqrt{2GM_T\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R_T + h}\right)}$$

b) Suponga que la altura de liberación es de 500 km. Realice la integral

$$\Delta t = \int_i^f dt = -\int_i^f \frac{dr}{v}$$

para encontrar el tiempo en caída a medida que el objeto se mueve desde el punto de liberación hasta la superficie de la Tierra. El signo negativo aparece porque el objeto se mueve opuesto a la dirección radial, así que su rapidez es $v = -dr/dt$. Realice la integral numéricamente.

Sección 13.6 Consideraciones energéticas en el movimiento planetario y de satélites

a) ¿Cuál es la rapidez mínima, en relación con el Sol, necesaria para que una nave espacial escape del sistema solar, si parte en la órbita de la Tierra? b) El *Voyager I* logró una rapidez máxima de 125 000 km/h en su camino para fotografiar a Júpiter. ¿Más allá de qué distancia desde el Sol es suficiente esta rapidez para escapar del sistema solar?

31. Una sonda espacial se dispara como un proyectil desde la superficie de la Tierra, con una rapidez inicial de 2.00×10^4 m/s. ¿Cuál será su rapidez cuando esté muy lejos de la Tierra? Ignore la fricción y la rotación de la Tierra.

32. ● Un satélite de 1 000 kg orbita la Tierra a una altura constante de 100 km. ¿Cuánta energía se debe agregar al sistema para mover el satélite en una órbita circular con altitud de 200 km? Explique los cambios de energía cinética, energía potencial y energía total.

33. Un "satélite copa de árbol" se mueve en una órbita circular justo sobre la superficie de un planeta, que se supone no ofrece resistencia del aire. Demuestre que su rapidez orbital v y la rapidez de escape del planeta se relacionan mediante la expresión $v_{esc} = \sqrt{2}v$.

● Ganímedes es la más grande de las lunas de Júpiter. Considere un cohete sobre la superficie de Ganímedes, en el punto más lejano del planeta (figura P13.34). ¿La presencia de Ganímedes hace que Júpiter ejerza una fuerza mayor, menor o igual sobre el cohete, en comparación con la fuerza que ejercería si Ganímedes no se interpusiera? Determine la rapidez de escape para el cohete del sistema planeta–satélite. El radio de Ganímedes es 2.64×10^6 m y su masa es 1.495×10^{23} kg. La distancia entre Júpiter y Ganímedes es 1.071×10^9 m, y la masa de Júpiter es 1.90×10^{27} kg. Ignore el movimiento de Júpiter y Ganímedes mientras dan vueltas en torno a su centro de masa.

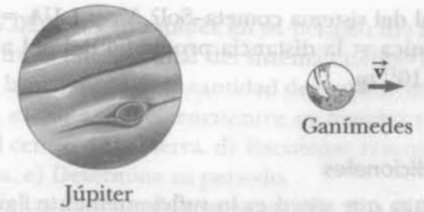

Figura P13.34

35. Un satélite de 200 kg de masa se coloca en órbita terrestre a una altura de 200 km sobre la superficie. a) Si supone una órbita circular, ¿cuánto tarda el satélite en completar una órbita? b) ¿Cuál es la rapidez del satélite? c) Si el satélite parte de la superficie de la Tierra, ¿cuál es la entrada de energía mínima necesaria para colocar este satélite en órbita? Ignore la resistencia del aire, pero incluya el efecto de la rotación diaria del planeta.

36. ● Un satélite de masa m, originalmente sobre la superficie de la Tierra, se coloca en órbita terrestre a una altura h. a) Si supone una órbita circular, ¿cuánto tarda el satélite en completar una órbita? b) ¿Cuál es la rapidez del satélite? c) ¿Cuál es la entrada de energía mínima necesaria para colocar este satélite en órbita? Ignore la resistencia del aire, pero incluya el efecto de la rotación diaria del planeta. ¿En qué posición en la superficie de la Tierra y en qué dirección se debe lanzar el satélite para minimizar la inversión de energía requerida? Represente la masa y el radio de la Tierra como M_T y R_T.

Un objeto se dispara verticalmente hacia arriba desde la superficie de la Tierra (de radio R_T) con una rapidez inicial v_i que es comparable, pero menor que, la rapidez de escape v_{esc}. a) Demuestre que el objeto logra una altura máxima h conocida por

$$h = \frac{R_T v_i^2}{v_{esc}^2 - v_i^2}$$

b) Un vehículo espacial se lanza verticalmente hacia arriba desde la superficie de la Tierra con una rapidez inicial de 8.76 km/s, menor que la rapidez de escape de 11.2 km/s. ¿Qué altura máxima alcanza? c) Un meteorito cae hacia la Tierra. Esencialmente está en reposo en relación con la Tierra cuando está a una altura de 2.51×10^7 m. ¿Con qué rapidez el meteorito golpea la Tierra? d) **¿Qué pasaría si?** Suponga que una pelota de beisbol se lanza con una rapidez inicial que es muy pequeña comparada con la rapidez de escape. Demuestre que la ecuación del inciso a) es consistente con la ecuación 4.12.

38. Un satélite se mueve alrededor de la Tierra en una órbita circular de radio r. a) ¿Cuál es la rapidez v_0 del satélite? Súbitamente, una explosión rompe el satélite en dos piezas, con masas m y $4m$. Enseguida de la explosión, la pieza más pequeña de masa m está estacionaria en relación con la Tierra y cae directamente hacia la Tierra. b) ¿Cuál es la rapidez v_i de la pieza más grande justo después de la explosión? c) Debido al aumento en su rapidez, esta pieza más grande ahora se mueve en una nueva órbita elíptica. Encuentre su distancia desde el centro de la Tierra cuando llega al otro extremo de la elipse.

39. Un cometa de 1.20×10^{10} kg de masa se mueve en una órbita elíptica alrededor del Sol. Su distancia desde el Sol varía entre 0.500 UA y 50.0 UA. a) ¿Cuál es la excentricidad de su órbita? b) ¿Cuál es su periodo? c) En el afelio, ¿cuál es la energía

potencial del sistema cometa–Sol? *Nota:* 1 UA = una unidad astronómica = la distancia promedio del Sol a la Tierra = 1.496×10^{11} m.

Problemas adicionales

40. ● Suponga que usted es lo suficientemente ágil como para correr a través de una superficie horizontal a 8.50 m/s, independientemente del valor del campo gravitacional. ¿Cuál sería a) el radio y b) la masa de un asteroide esférico sin aire de 1.10×10^3 kg/m^3 de densidad uniforme en el que podría lanzarse usted mismo en órbita al correr? c) ¿Cuál sería su periodo? d) ¿Su carrera afectaría significativamente la rotación del asteroide? Explique.

41. La nave espacial Observatorio Solar y Helioesférico (SOHO) tiene una órbita especial, elegida de tal modo que su vista del Sol nunca se eclipsa y siempre está lo suficientemente cerca de la Tierra para transmitir datos con facilidad. Su movimiento es casi circular alrededor del Sol, y es más pequeño que la órbita circular de la Tierra. Sin embargo, su periodo no es menor a un año, sino que es igual a un año. Siempre está ubicado entre la Tierra y el Sol a lo largo de la línea que los une. Ambos objetos ejercen fuerzas gravitacionales sobre el observatorio. Demuestre que su distancia desde la Tierra debe estar entre 1.47×10^9 m y 1.48×10^9 m. En 1772, Joseph Louis Lagrange determinó teóricamente la posición espacial que permitiría esta órbita. La nave espacial SOHO tomó esta posición el 14 de febrero de 1996. *Sugerencia:* Use datos que sean precisos a cuatro dígitos. La masa de la Tierra es 5.983×10^{24} kg.

42. Sea Δg_L la diferencia en los campos gravitacionales producidos por la Luna en los puntos más cercano y más lejano de la Luna sobre la superficie de la Tierra. Encuentre la fracción $\Delta g_L/g$, donde g es el campo gravitacional de la Tierra. (Esta diferencia es responsable del acontecimiento de las *mareas lunares* sobre la Tierra.)

43. **Problema de repaso.** Dos esferas duras idénticas, cada una con masa m y radio r, se liberan desde el reposo en espacio vacío con sus centros separados por la distancia R. Se les permite chocar bajo la influencia de su atracción gravitacional. a) Demuestre que la magnitud del impulso recibido por cada esfera antes de tener contacto se conoce por $[Gm^3(1/2r - 1/R)]^{1/2}$. b) **¿Qué pasaría si?** Encuentre la magnitud del impulso que cada una recibe durante su contacto si chocan elásticamente.

44. Dos esferas que tienen masas M y $2M$ y radios R y $3R$, respectivamente, se liberan desde el reposo cuando la distancia entre sus centros es $12R$. ¿Qué tan rápido se moverá cada esfera cuando choquen? Suponga que las dos esferas sólo actúan entre sí.

45. Un anillo de materia es una estructura familiar en astronomía planetaria y estelar. Los ejemplos incluyen los anillos de Saturno y una nebulosa anillo. Considere un gran anillo uniforme que tiene 2.36×10^{20} kg de masa y 1.00×10^8 m de radio. Un objeto de 1 000 kg de masa se coloca en un punto A sobre el eje del anillo, a 2.00×10^8 m del centro del anillo (figura P13.45). Cuando el objeto se libera, la atracción del anillo hace que el objeto se mueva a lo largo del eje hacia el centro del anillo (punto B). a) Calcule la energía potencial gravitacional del sistema objeto–anillo cuando el objeto está en A. b) Calcule la energía potencial gravitacional del sistema cuando el objeto está en B. c) Calcule la rapidez del objeto mientras pasa por B.

Figura P13.45

46. a) Demuestre que la rapidez de cambio de la aceleración en caída libre con distancia sobre la superficie de la Tierra es

$$\frac{dg}{dr} = -\frac{2GM_T}{R_T^3}$$

Esta rapidez de cambio sobre la distancia se llama *gradiente*. b) Si supone que h es pequeña comparada con el radio de la Tierra, demuestre que la diferencia en aceleración en caída libre entre dos puntos separados por la distancia vertical h es

$$|\Delta g| = \frac{2GM_T h}{R_T^3}$$

c) Evalúe esta diferencia para $h = 6.00$ m, una altura representativa para un edificio de dos pisos.

47. Como astronauta, observa que un planeta pequeño es esférico. Después de aterrizar en el planeta, se pone en movimiento y camina siempre en línea recta hacia adelante, después de completar una vuelta de 25.0 km se encuentra de regreso en su nave espacial desde el lado opuesto. Sostiene un martillo y una pluma de halcón a una altura de 1.40 m, los libera y observa que caen juntos a la superficie en 29.2 s. Determine la masa del planeta.

48. Cierto sistema estelar cuaternario consiste en tres estrellas, cada una de masa m, que se mueven en la misma órbita circular de radio r en torno a una estrella central de masa M. Las estrellas orbitan en el mismo sentido y se ubican a un tercio de revolución una de otra. Demuestre que el periodo de cada una de las tres estrellas es

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{r^3}{G(M + m/\sqrt{3})}}$$

49. **Problema de repaso.** G. K. O'Neill (1974) propuso un hábitat cilíndrico en el espacio con 6.00 km de diámetro y 30 km de largo. Tal hábitat tendría ciudades, tierra y lagos en la superficie interior así como aire y nubes en el centro. Todo se man-

tendría en su lugar mediante la rotación del cilindro en torno a su eje largo. ¿Qué tan rápido tendría que girar el cilindro para imitar el campo gravitacional de la Tierra en las paredes del cilindro?

50. ● Muchas personas suponen que la resistencia del aire que actúa sobre un objeto en movimiento siempre hará que el objeto frene. Sin embargo, en realidad puede ser responsable de hacer que el objeto aumente su rapidez. Considere un satélite de la Tierra de 100 kg en una órbita circular a una altura de 200 km. Una fuerza pequeña de resistencia de aire hace que el satélite caiga en una órbita circular con una altura de 100 km. a) Calcule su rapidez inicial. b) Calcule su rapidez final en este proceso. c) Calcule la energía inicial del sistema satélite–Tierra. d) Calcule la energía final del sistema. e) Demuestre que el sistema perdió energía mecánica y encuentre la cantidad de la pérdida debida a fricción. f) ¿Qué fuerza hace que aumente la rapidez del satélite? Encontrará que un diagrama de cuerpo libre es útil para explicar su respuesta.

51. Dos planetas hipotéticos, de masas m_1 y m_2 y radios r_1 y r_2, respectivamente, están casi en reposo cuando se encuentran separados una distancia infinita. Debido a su atracción gravitacional, se dirigen uno hacia el otro rumbo a una colisión. a) Cuando su separación centro a centro es d, encuentre expresiones para la rapidez de cada planeta y para su rapidez relativa. b) Encuentre la energía cinética de cada planeta justo antes de que choquen, considere $m_1 = 2.00 \times 10^{24}$ kg, $m_2 = 8.00 \times 10^{24}$ kg, $r_1 = 3.00 \times 10^6$ m, y $r_2 = 5.00 \times 10^6$m. *Nota:* Se conservan tanto la energía como la cantidad de movimiento del sistema.

52. La distancia máxima desde la Tierra al Sol (en afelio) es 1.521×10^{11} m, y la distancia de máximo acercamiento (en perihelio) es 1.471×10^{11} m. La rapidez orbital de la Tierra en perihelio es 3.027×10^4 m/s. Determine a) la rapidez orbital de la Tierra en afelio, b) las energías cinética y potencial del sistema Tierra–Sol en perihelio y c) las energías cinética y potencial en afelio. ¿La energía total del sistema es constante? (Ignore el efecto de la Luna y otros planetas.)

53. Estudios de la correspondencia del Sol con su galaxia, la Vía Láctea, revelaron que el Sol se ubica cerca del borde exterior del disco galáctico, más o menos a 30 000 años luz del centro. El Sol tiene una rapidez orbital de aproximadamente 250 km/s alrededor del centro galáctico. a) ¿Cuál es el periodo del movimiento galáctico del Sol? b) ¿Cuál es el orden de magnitud de la masa de la galaxia Vía Láctea? Suponga que la galaxia está hecha principalmente de estrellas entre las cuales el Sol es característico. ¿Cuál es el orden de magnitud del número de estrellas en la Vía Láctea?

54. Durante los vuelos de cohetes a gran altura se han registrado pulsos de rayos X provenientes de Cygnus X-1, una fuente de rayos X del espacio. Es posible interpretar que las señales se originan cuando una burbuja de materia ionizada orbita un hoyo negro con un periodo de 5.0 ms. Si la burbuja está en una órbita circular en torno a un hoyo negro cuya masa es de $20M_{\text{Sol}}$, ¿cuál es el radio orbital?

55. Los astrónomos detectaron un meteoroide distante que se mueve a lo largo de una línea recta que, si se extiende, pasaría a una distancia de $3R_T$ del centro de la Tierra, donde R_T es el radio de la Tierra. ¿Qué rapidez mínima debe tener el meteoroide si la gravitación de la Tierra no desvía al meteoroide para que golpee a la Tierra?

56. El satélite artificial más antiguo en órbita es el *Vanguard I*, que se lanzó el 3 de marzo de 1958. Su masa es de 1.60 kg. En su órbita inicial, su distancia mínima desde el centro de la Tierra fue de 7.02 Mm y su rapidez en su perigeo fue 8.23 km/s. a) Encuentre la energía total del sistema satélite–Tierra. b) Encuentre la magnitud de la cantidad de movimiento angular del satélite. c) En apogeo, encuentre su rapidez y su distancia desde el centro de la Tierra. d) Encuentre el semieje mayor de su órbita. e) Determine su periodo.

57. Dos estrellas de masa M y m, separadas una distancia d, dan vueltas en órbitas circulares en torno a su centro de masa (figura P13.57). Demuestre que cada estrella tiene un periodo dado por

$$T^2 = \frac{4\pi^2 d^3}{G(M+m)}$$

Proceda a la aplicación de la segunda ley de Newton a cada estrella. Note que la condición del centro de masa requiere que $Mr_2 = mr_1$, donde $r_1 + r_2 = d$.

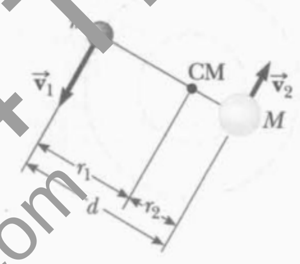

Figura P13.57

58. Demuestre que el periodo mínimo para un satélite en órbita alrededor de un planeta esférico de densidad uniforme ρ es

$$T_{\min} = \sqrt{\frac{3\pi}{G\rho}}$$

independiente del radio del planeta.

59. Dos partículas idénticas, cada una de 1 000 kg de masa, se desplazan en espacio libre a lo largo de la misma trayectoria. En un instante su separación es de 20.0 m y cada una tiene precisamente la misma velocidad de $800\hat{\mathbf{i}}$ m/s. ¿Cuáles son sus velocidades cuando están separadas 2.00 m?

60. a) Considere dos objetos de masa m, no necesariamente pequeña comparada con la masa de la Tierra, que se liberan a una distancia de 1.20×10^7 m desde el centro de la Tierra. Suponga que los objetos se comportan como un par de partículas aisladas del resto del Universo. Encuentre la magnitud de la aceleración a_{rel} con la que cada uno comienza a moverse en relación con el otro. Evalúe la aceleración para b) $m = 5.00$ kg, c) $m = 2\,000$ kg y d) $m = 2.00 \times 10^{24}$ kg. Describa el patrón de variación de a_{rel} con m.

61. A medida que la fusión termonuclear procede en su núcleo, el Sol pierde masa en una proporción de 3.64×10^9 kg/s. Durante el periodo de 5 000 años de historia registrada, ¿cuánto ha cambiado la duración del año debido a la pérdida de masa del Sol? *Sugerencias:* Suponga que la órbita de la Tierra es circular. Sobre el sistema Tierra–Sol no actúan momentos de torsión externos, de modo que se conserva la cantidad de movimiento angular. Si x es pequeña comparada con 1, en tal caso $(1 + x)^n$ es casi igual a $1 + nx$.